HETEROGENE SCHEMATA, IHRE BERECHNUNGEN UND KOMPLEXITÄT

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Vladimir Sigmund
aus Olomouc

Göttingen 1974

HETEROGENE SCHEMATA, IHRE BERECHNUNGEN UND KOMPLEXITÄT

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Vladimir Sigmund
aus Olomouc

Göttingen 1974

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D7

Referent: Prof. Dr. B. Brosowski

Koreferent: Prof. Dr. R. Kreß

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Juli 1974

Zusammenfassung

Heterogene Schemata werden definiert, die sowohl heterogene schleifen- und verzweigungsfreie Rechenschemata als auch heterogene monadische Programmschemata einschliessen. Programme sind interpretierte Schemata, mit deren Hilfe man Rechenprozesse beschreibt: je nach der Art der Interpretation sind es schleifen- und verzweigungsfreie heterogene algebraische Berechnungen oder heterogene monadische Programmberechnungen. Das äußere Verhalten eines Programms ist die nach dem Programm berechenbare Funktion. Die algebraische Struktur von Schemata, Programmen, ihrer Berechnungen und ihrer äußeren Verhalten wird untersucht. Besondere Aufmerksamkeit ist dabei der Konstruktion des sog. freien äußeren Verhaltens aller Schemata über gegebenem Instruktionszeichenvorrat gewidmet, denn sie ist universell: unter verschiedenen Interpretationen ist das äußere Verhalten aller zugehörigen Programme ein homomorphes Abbild dieses freien äußeren Verhaltens, mit einem eindeutig bestimmten Homomorphismus. Die äußeren Verhalten von Programmen besitzen die Struktur einer heterogenen algebraischen Theorie, woraus sich eine vom Berechnungsbegriff unabhängige Charakterisierung aller mit vorgegebenen Instruktionen berechenbaren Funktionen gewinnen läßt (Satz 5.10, S. 63 und 5.18, S. 91). Dieses Resultat ist eine Verallgemeinerung der entsprechenden Resultate für homogene Rechenschemata (Arbib u. Give'on 1968a,b) einerseits und für homogene Programmschemata (Elgot 1970a,b, 1971, 1972) andererseits. Anschliessend wird eine Methode der sog. sukzessiven Interpretation entwickelt, die es ermöglicht, auch nichtmonadische Programmberechnungen oder „algebraische Berechnungen mit Verzweigungen und Schleifen" zu erfassen. Bei den Komplexitätsuntersuchungen zum Schluß wird die Klasse der i.a. argumentabhängigen Berechnungskomplexitätsmaßen betrachtet, die die gemeinsame algebraische Struktur von Schemata, Programmen und ihrer äußeren Verhalten wiedergeben. Für sie ergeben sich aus einfachen Eigenschaften von halbgeordneten heterogenen Algebren einige zum Transitivität- und Simulationssatz in Strassen (1972, 1973) analoge Ergebnisse, die dort für zwei spezielle argumentunabhängige Komplexitätsmaße abgeleitet wurden (Satz 7.1, S. 115, 7.2, S. 116).

Herrn Prof. Dr. B. Brosowski danke ich für die Betreuung und für die Anregungen, die er mir in zahlreichen Gesprächen gegeben hat. Der Gesellschaft für Wissenschaftliche Datenverarbeitung Göttingen gilt mein Dank für die Unterstützung während der Arbeit.

Inhalt

§1. Einleitung v

§2. Schemata 1
2.1. Berechnungsgraphen 2
2.2. Schemata 4
2.3. Wege in Berechnungsgraphen 5
2.4. Freies äußeres Verhalten von Schemata 8

§3. Algebren von Schemata 11
3.1. Spezielle Schemata 11
3.2. Produkt 16
3.3. Tupeln 20
3.4. Iteration 23
3.5. Algebren von Schemata 27
3.6. Heterogene algebraische Theorien 29

§4. Satz über Generatoren 34

§5. Interpretationen 40
5.1. Terme-Interpretation der Schemata aus $\mathcal{G}_{\Omega}^{sf,\Omega\circ t}$ 42
5.2. Programm-Interpretation der Schemata aus $\mathcal{G}_{\Omega}^{sf,\Omega\circ t}$ 47
5.3. Berechnung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{G}_{\Gamma}^{sf,\Gamma\circ t}$ 48
5.4. Äußeres-Verhalten-Interpretation von Berechnungen 56
5.5. Berechenbare-Abbildung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{G}_{\Gamma}^{sf,\Gamma\circ t}$ mittels Berechnungen 58
5.6. Direkte berechenbare-Abbildung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{G}_{\Gamma}^{sf,\Gamma\circ t}$ 59
5.7. Berechenbare-Abbildung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{G}_{\Gamma}^{sf,\Gamma\circ t}$ mittels Terme 61
5.8. Die nach den Programmen aus $\mathcal{G}_{\Gamma}^{sf,\Gamma\circ t}$ berechenbaren Abbildungen 62
5.9. Programm-Interpretation der Schemata aus $\mathcal{G}_{\Omega}, \mathcal{G}_{\Omega}^{sf}, \mathcal{G}_{\Omega}^{sf,\Omega\circ t}$ 64
5.10. Berechnung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{G}_{\Gamma}$ 65
5.11. Äußeres-Verhalten-Interpretation von Berechnungen 77
5.12. Berechenbare-Abbildung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{G}_{\Gamma}$ mittels Berechnungen 80
5.13. Direkte berechenbare-Relation-Interpretation der Programme aus $\mathcal{G}_{\Gamma}$ 81

5.14. Berechenbare-Relation-Interpretation der Programme aus $\mathfrak{P}_\Gamma$ mittels des freien äußeren Verhaltens 86
5.15. Die nach den Programmen aus $\mathfrak{P}_\Gamma$ berechenbaren Abbildungen 89
§6. Sukzessive Interpretation 92
§7. Komplexität 100
7.1. Argumentabhängige Tiefe algebraischer Berechnungen 103
7.2. Argumentabhängige Tiefe von Programmberechnungen 109
7.3. Strukturerhaltende Berechnungskomplexitätsmaße von Schemata 114

Symbolverzeichnis

Ω, $\widetilde{\Omega}$	S. 1
$\mathcal{S}_\Omega$	5
$\mathcal{S}_\Omega^{sf}$	5
$\mathcal{S}_\Omega^{sf,t}$	5
$\mathcal{S}_\Omega^{sf,\aleph_0 t}$	5
$\Sigma_{\widetilde{\Omega}}$	5
$(\Sigma_{\widetilde{\Omega}})$	7
$(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\Omega}}})$	7
$(\!(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\Omega}}})\!)$	9
$[\widehat{\Sigma_{\widetilde{\Omega}}}]$	10
I_S	12
$\mathcal{G}_{S,P}$	15
$\mathcal{G}_{S,F}$	15
$\mathcal{T}_\Omega$	43
$\widehat{G}_X$	50
(X)	56
$(\!(X)\!)(\sigma,\tau)$	69
$[X]_R$	78
$[X]_P$	78
R_X	81
$(\!(R_X)\!)$	81
$[R_X]$	82
$\mathcal{M}(S^{*2})$	100
$(X,\mathbb{R}_+)$	105
$[X,\mathbb{R}_+]$	110

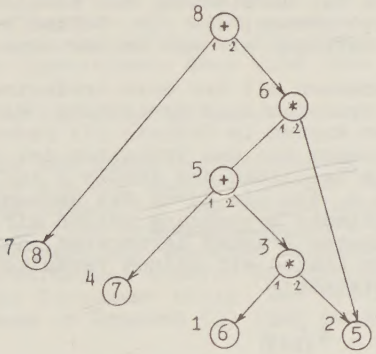
§1. Einleitung

Algebraische Berechnungen definiert man mit Hilfe von Rechenschemata. Als einfaches Beispiel betrachten wir das ganzzahlige Polynom zweiten Grades $P(x)=6x^2+7x+8$, dessen Wert im Punkt 5 zu berechnen ist. Das Hornersche Rechenschema kann man z.B. mittels der Aufzählung aller Rechenschritte zusammen mit der Angabe ihrer gegenseitigen Abhängigkeit beschreiben:

(1)
$r_1:=6$ $\quad$ $r_5:=r_4+r_3$
$r_2:=5$ $\quad$ $r_6:=r_5*r_2$
$r_3:=r_1*r_2$ $\quad$ $r_7:=8$
$r_4:=7$ $\quad$ $r_8:=r_7+r_6$.

Anschaulicher ist die Darstellung des Rechenschemas mit Hilfe eines markierten gerichteten geordneten schleifenfreien Graphen (s. Arbib u. Give'on 1968a, S.333):

(2)



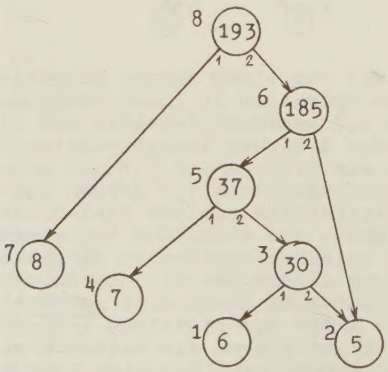
Die Pfeile des Graphen, die von einem Knoten ausgehend auf die Argumente der zugehörigen Operation in ihrer Anordnung hinweisen, sind mittels der Indizes 1,2 geordnet (wichtig bei nichtkomutativen Operationen). Bei der üblichen Interpretation des obigen Rechenschemas bezeichnen die Ziffern 5,6,7,8 die entsprechenden reellen Zahlen, die Operationszeichen +,* werden als die Operationen Addition und Multiplikation reeller Zahlen interpretiert. Die gegenseitige Abhängigkeit der einzelnen Rechenschritte, im Graphen durch die Pfeile zwischen den Knoten dargestellt, gibt die Art der Zusammensetzung dieser Operationen an.

Oft wird das obige Rechenschema durch eine geordnete Liste (1) dargestellt, bei der also außer der einzelnen Rechenschritte und ihrer gegenseitigen Abhängigkeit auch die Reihenfolge ihrer „seriellen" Durchführung vorgegeben ist (Strassen 1972,S.324). Uns ist diese Darstellung zu speziell, denn sie bestimmt auch die Reihenfolge der Durchführung derjenigen Rechenschritte, die in

beliebiger Reihenfolge durchgeführt werden können mit dem gleichen Ergebnis, da sie voneinander unabhängig sind (s. z.B. die Rechenschritte 1 und 2 oben). Man könnte sagen, daß diese Darstellung von Rechenschemata durch geordnete Listen „maschinenabhängig" ist,denn sie ist von der „seriellen" Arbeitsweise eines rechnenden Menschen oder der meisten heutigen Rechenmaschinen abgeleitet, die eine Rechenoperation nach der anderen auch dann durchführen, wenn sie voneinander unabhängig sind. Voneinander unabhängige Rechenschritte können jedoch auch „paralell" durchgeführt werden (von einer fähigeren Rechenmaschine, die über mehrere Rechenwerke verfügt), was bei der Darstellung von Rechenschemata mit Hilfe von geordneten Listen verschleiert wird. Die Darstellung des obigen Rechenschemas durch die nichtgeordnete Aufzählung (1) oder die gleichwertige Darstellung durch den Graphen (2) bestimmen dagegen die Reihenfolge der Durchführung nur bei denjenigen Operationen, die hintereinander durchgeführt werden müssen, unabhängig von der Beschaffenheit des Rechners. Dasselbe tun zwar auch die sog. „Ω-Mengen", eine andere Darstellungsart von Rechenschemata in Strassen (1973), gegenüber ihnen haben die markierten geordneten gerichteten Graphen jedoch den Vorteil, daß sie ebenfalls zur Darstellung von monadischen Programmschemata (Elgot) dienen können, die i.a. Schleifen enthalten. Mit Programmschemata beschäftigen wir uns weiter unten in dieser Einleitung.

Das Rechenschema (2) zusammen mit der oben erwähnten Interpretation definiert uns die beabsichtigte Berechnung. Wir ordnen rekursiv nach der Höhe der Knoten im Graphen (2) jedem Knoten sein Verhalten im Rechenschema zu: das Verhalten des Knoten 1 ist die reelle Zahl 6, das Verhalten des Knoten 2 ist 5, des Knoten 3 die Zahl 30=6·5 u.s.w. Als die durch das Rechenschema unter dieser Interpretation bestimmte Berechnung wollen wir den markierten gerichteten geordneten Graphen betrachten, der aus (2) durch die Markierung jedes Knoten mit seinem Verhalten anstelle des Operationszeichens entsteht:

(3)



Die Zahl 193, die sich als das Verhalten des Knoten 8 ergibt, ist der gesuchte Wert P(5) unseres Polynomes, und wir nennen sie

das äußere Verhalten der Berechnung. Weil es eine Konstante ist, sprechen wir auch von einer konstanten Berechnung.

In der Praxis will man oft verschiedene Berechnungen hinsichtlich ihrer Komplexität vergleichen, sei es zwecks Prioritätenzuordnung bei Multiprogramming, sei es zwecks Kostenersparnis bei häufig wiederkehrenden Berechnungen, oder sei es aus anderen Gründen. Man benötigt dazu ein Komplexitätsmaß, daß für jede Berechnung in der Konkurenzmenge ihren Kompliziertheitsgrad oder (wie wir es nennen wollen) ihre Komplexität ermittelt, und ein Vergleichskriterium, nach dem die Komplexität zweier Berechnungen verglichen werden kann. Als Beispiel von Komplexitätsmaßen unserer Berechnung wollen wir die geläufigen Maße Länge und Tiefe zeigen, die auch in Strassen (1972,1973) betrachtet werden. Sei jeder der Konstanten 5,6,7,8, die man als nullstellige Operationen auffaßt, je eine positive reelle Zahl z_5,z_6,z_7,z_8 als ihre individuelle Komplexität zugeordnet, und seien analog $z_+,z_*>0$ die individuellen Komplexitäten der Operationen Addition und Multiplikation. Diese Zahlen sollen z.B. die Zeitdauer der zugehörigen Operationen bei Durchführung der Berechnung in einem Rechner darstellen. Im Falle einer seriellen Durchführung der Berechnung (in einem Rechner mit einem einzigen Rechenwerk) ergibt sich als ihre gesamte Zeitdauer die Summe der individuellen Komplexitäten der Operationen über alle ihre Vorkommen:

$$(4)\quad L=z_6+z_5+z_*+z_7+z_++z_*+z_8+z_+.$$

Die Zahl L wird die Länge der Berechnung (3) genannt. Wir bezeichnen L auch als die Komplexität der Berechnung (3) unter dem Komplexitätsmaß Länge. Als das Vergleichskriterium dient hier natürlich die übliche Ordnungsrelation $\leq$ der reellen Zahlen. Im Falle eines Rechners mit mehreren Rechenwerken und der optimal paralellen Durchführung unserer Berechnung ist ein anderes Maß für die gesamte Zeitdauer nötig. Man bestimmt zuerst die Zeitdauer aller Wege im Graphen (3) (der durch den Graphen (2) definiert ist)

$$z_8+z_+,\ z_7+z_++z_*+z_+,\ z_6+z_*+z_++z_*+z_+,\ldots$$

und nimmt dann ihr Maximum. Diese Zahl heißt die Tiefe der Berechnung (3).

In der Praxis ist das obige Beispiel einer konstanten Berechnung selten. Häufiger will man eine Abbildung realisieren. Nehmen wir z.B. an, daß der Wert des obigen Polynoms nicht nur im Punkt 5, sondern auch in einigen anderen Punkten der reellen Achse zu berechnen ist. Das zugehörige Rechenschema wird durch die folgende Aufzählung beschrieben:

(5) Variable r_2

$r_1:=6$ $\quad$ $r_6:=r_5*r_2$

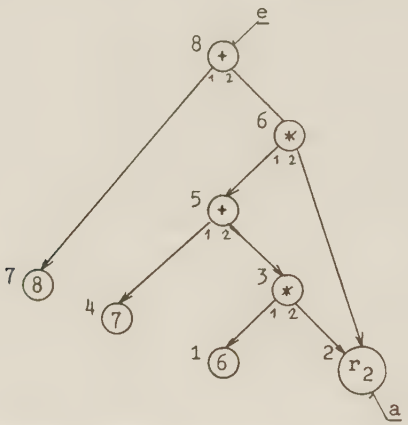
$r_3:=r_1*r_2$ $\quad$ $r_7:=8$

$r_4:=7$ $\quad$ $r_8:=r_7+r_8$; Ergebnis.

$r_5:=r_4+r_3$

Hier werden sieben Rechenschritte und eine Variable mit Angabe ihrer gegenseitigen Abhängigkeit aufgezählt. In graphischer Darstellung

(6)



Dieses Rechenschema wird so interpretiert, daß man zuerst die Grundmenge bestimmt, über der das Schema operiert, in unserem Fall die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die konstanten Operationszeichen 5,6,7,8 und die zweistelligen Operationszeichen +,* werden genauso interpretiert wie oben. Für jede für die Variable r_2 eingesetzte reelle Zahl a erhält man auf die im ersten Beispiel beschriebene Weise eine konstante Berechnung B_a (vgl. (3),S.vi), die die reelle Zahl P(a) als ihr äußeres Verhalten liefert. Wir nennen jetzt die Menge

(7) $\{B_a; a \in \mathbb{R}\}$

die Berechnung nach dem Rechenschema (6) unter dieser Interpretation; jeder Graph B_a heißt ein Berechnungslauf, und das Paar $(P(a),a) \in \mathbb{R}^2$ ist sein äußeres Verhalten. Als das äußere Verhalten der Berechnung (7) bezeichnen wir die Abbildung

(8) $P:\mathbb{R} \to \mathbb{R}: a \mapsto P(a)$,

die durch die äußeren Verhalten aller Berechnungsläufe definiert ist. Die Zahlen a aus R heißen die Argumente, die Funktionswerte P(a) sind die Ergebnisse der Berechnung bzw. der entsprechenden Berechnungsläufe. Die Interpretation besteht also aus der Komposition zweier Zuordnungen: wir ordnen zuerst dem Rechenschema (6) die Berechnung (7) und dieser dann ihr äußeres Verhalten (8) zu. Natürlich kann man dem Rechenschema direkt die Abbildung (8) zuordnen, ohne Hilfe der Berechnungsläufe: man kennt die Bedeutung der einzelnen Operationszeichen 6,7,8,+,* im Schema (6) als die entsprechenden null- bzw. zweistelligen Operatio-

nen über der Grundmenge R; die Variable r_2 wird dann als die identische Abbildung $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ interpretiert. Rekursiv nach der Höhe der Knoten im Graphen (6) ordnet man jedem Knoten eine Operation über $\mathbb{R}$ als sein Verhalten zu: dem Knoten 1 die nullstellige Operation 6 über R, dem Knoten 2 die einstellige Operation $x\mapsto x$ ($x\in\mathbb{R}$), dem Knoten 3 die zusammengesetzte einstellige Operation $x\mapsto 6x$ ($x\in\mathbb{R}$) usw. (vgl. Polynomsymbole und Polynome einer Algebra, Grätzer (1968),Kap.1). Es ist leicht zu sehen, daß die zusammengesetzte Operation, die sich als das Verhalten des Knoten 8 ergibt, mit der mittels Berechnungsläufe gewonnenen Abbildung (8) übereinstimmt. Wir beschäftigen uns mit dem Problem „was soll man unter der Bedeutung eines Rechenschemas verstehen" (oder, wie man es auch nennt, mit der Semantik von Rechenschemata) in §5 im Haupttext. In dem markierten Graphen (6) haben wir den Knoten mit der Variablen r_2 zusätzlich mit dem Buchstabe a (für „Argument") indiziert, und den Knoten (Rechenschritt) 8, der uns bei dem Rechenprozeß den Funktionswert der zu realisierenden Abbildung (8) liefert, zusätzlich mit dem Buchstabe e (für „Ergebnis") indiziert; dies ist zweckmäßig vor allem bei grösseren und komplizierteren Rechenschemata, wie wir weiter unten an einem Beispiel zeigen.

Wenn wir das Komplexitätsmaß Länge auf die obige Berechnung $\{B_a;a\in\mathbb{R}\}$ anwenden wollen, mit den gleichen individuellen Komplexitäten $z_6,z_7,\ldots,z_*$ der einzelnen Operationen, so müssen wir hier im Vergleich zum ersten Beispiel bei jedem Berechnungslauf im Rechenschritt 2 das jeweilige Argument und seine Komplexität betrachten. Für ein Argument $a\in\mathbb{R}$ von einer individuellen Komplexität $z_a>0$ erhalten wir die Zahl $L-z_5+z_a$ als die Länge des Berechnungslaufs B_a. Wenn wir $L':=L-z_5$ setzen, so ergibt sich eine Abbildung

(9) $\mathbb{R}\to\mathbb{R}:a\mapsto z_a+L'$.

Sei $\{\tilde{B}_\iota;\iota\in I\}$ eine von $\{B_a;a\in\mathbb{R}\}$ verschiedene Berechnung (nach einem anderen Rechenschema) mit einer Menge $I\subseteq\mathbb{R}$ als dem Bereich der Argumente der Berechnungsläufe, und sei analog zu oben

(10) $I\to\mathbb{R}:\iota\mapsto z_\iota+\tilde{L}'$, $\tilde{L}'>0$,

die durch die Längen aller Berechnungsläufe definierte Abbildung. Als ein Komplexitätsmaß betrachten wir hier die Zuordnung, die der Berechnung $\{B_a;a\in\mathbb{R}\}$ bzw. $\{\tilde{B}_\iota;\iota\in I\}$ die Abbildung (9) bzw. (10) zuordnet. Als ein Vergleichskriterium kann hier jede Halbordnung $\varsigma\subseteq(\mathbb{R}_P^{\mathbb{R}})^2$ dienen ($\mathbb{R}_P^{\mathbb{R}}$ ist die Klasse aller partiellen Funktionen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; mit D_f bezeichnen wir den Definitionsbereich von f $\mathbb{R}_P^{\mathbb{R}}$), z.B.

$$f\varsigma g :\Leftrightarrow \forall x\in D_f\ \forall y\in D_g:\ f(x)\leq g(y).$$

Wenn wir dagegen nur die sich entsprechenden Berechnungsläufe

zweier Berechnungen mit dem gleichen äußeren Verhalten (8) vergleichen wollen (in der Suche nach einer „kürzesten" Realisierung dieser Funktion) und deshalb die individuellen Komplexitäten der Argumente nicht berücksichtigen müssen, so ergibt sich als die Komplexität der Berechnung $\{B_a; a\in R\}$ z.B. die reelle Zahl L' mit der Ordnungsrelation $\leq$ in R als Vergleichskriterium (vgl. Strassen 1972). Wir erinnern daran, daß wir auch den nichtkonstanten Operationen Addition und Multiplikation in R als ihre individuellen Komplexitäten gewisse Zahlen $z_+, z_* > 0$ zugeordnet haben (die Zeitdauer jeder Operation ist für alle ihre Argumente gleich). Deshalb genügt uns hier die Zahl L' zur Charakterisierung der Länge aller Berechnungsläufe von $\{B_a; a\in R\}$, unabhängig von ihren Argumenten. Ein derartiges Komplexitätsmaß von Berechnungen nennen wir argumentenunabhängig. Wir können jedoch auch die Länge als ein argumentenabhängiges Komplexitätsmaß betrachten. Seien $z_6, z_7, z_8 > 0$ die individuellen Komplexitäten der nullstelligen Operationen wie früher, und seien $\xi_+, \xi_* : R^2 \to R$ zwei Funktionen mit positiven Funktionswerten (für $(x,y)\in R^2$ soll $\xi_+(x,y)$ bzw. $\xi_*(x,y)$ z.B. die Zeitdauer der Addition bzw. der Multiplikation von x und y in einem Rechner bedeuten). Ist wieder $z_a > 0$ die individuelle Komplexität des Arguments a der Berechnung $\{B_a; a\in R\}$ nach dem Rechenschema (6), viii , so ist die Länge des Berechnungslaufs B_a gleich $z_a + L'(a)$ mit

$$L'(a) := z_6 + \xi_*(6,a) + z_7 + \xi_+(7,6a) + \xi_*(7+6a,a) + z_8 + \xi_+(8,7a+6a^2).$$

Bei einem Komplexitätsmaß, das nur die Länge der sich entsprechenden Berechnungsläufe (mit dem gleichen äußeren Verhalten) vergleicht, ist dann statt der Zahl L' z.B. die Abbildung

$$R \to R : a \mapsto L'(a)$$

als die Komplexität von $\{B_a; a\in R\}$ zu nehmen, mit einer Halbordnung $\subseteq (R^R)^2$ als dem Vergleichskriterium.

Wir wollen jetzt am Beispiel von Berechnungen linearer Abbildungen zeigen, daß Rechenschemata, Berechnungen und die durch sie definierten Abbildungen oft eine gemeinsame algebraische Struktur besitzen, die auch von einigen Komplexitätsmaßen wiedergegeben wird. Seien $p,n\in N, K$ ein Körper, und sei

(11) $(\!(\widehat{b}_{ij})\!)$

eine (p×n)-Matrix mit Matrixelementen aus K. Sei

(12) $\beta : K^p \to K^n$

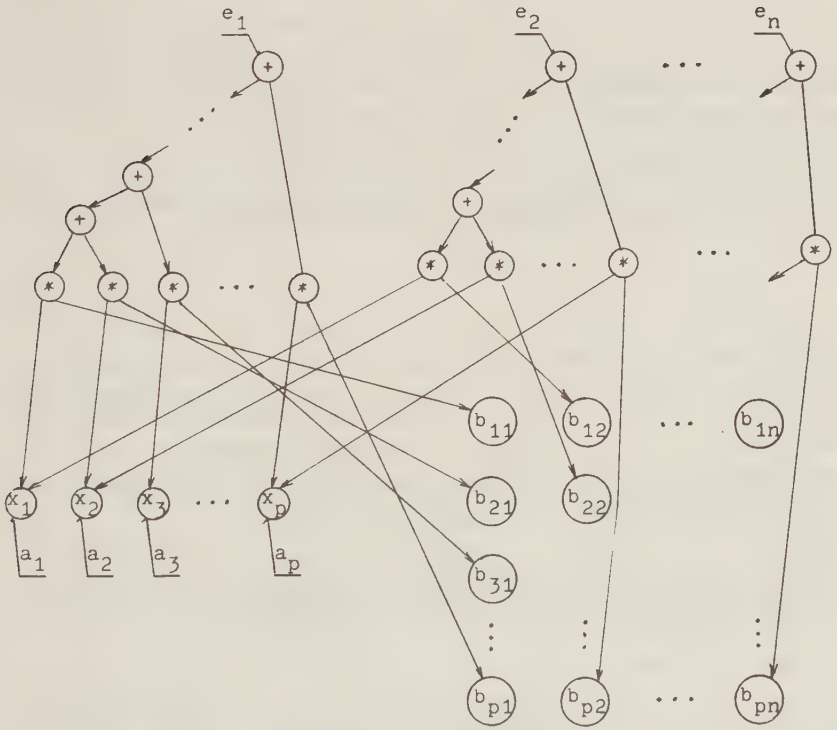
die Abbildung definiert durch

(13) $\beta:(u_1,\ldots,u_p)\longmapsto(v_1,\ldots,v_n)$, $v_j:=\sum_{i=1}^{p}\hat{b}_{ij}u_i$ $(j=1,\ldots,n)$

$((u_1,\ldots,u_p)\in K^p)$.

Wir betrachten das Rechenschema B mit der folgenden graphischen Darstellung:

(14)



Die beabsichtigte Interpretation ist offensichtlich. Der Körper K legt die Grundmenge fest, über der wir operieren. Die Zeichen b_{ij} im Schema vertreten gewisse Konstanten (nullstellige Operationen) der Berechnung, und zwar die Elemente $\hat{b}_{ij}\in K$ der Matrix der Abbildung β. Die zweistelligen Operationszeichen +,* werden als die zweistelligen Operationen Addition und Multiplikation des Körpers K interpretiert. Seien $u_1,\ldots,u_p$ p Elemente aus K, die wir der Reihe nach für die Variablen $x_1,\ldots,x_p$ des Rechenschemas einsetzen. Analog zum ersten Beispiel können wir jetzt jeden Kno-

ten des Rechenschemas mit seinem Verhalten (d.h. mit einem Element aus K, das das „Zwischenergebnis" des Rechenprozesses darstellt, nachdem die diesem Knoten zugeordnete Operation durchgeführt wurde, s.S.vi) anstatt des Operationszeichens markieren, um den entsprechenden Berechnungslauf zu erhalten, den wir mit

(15) $B_{u_1 \ldots u_p}$

bezeichnen. Das Rechenschema ist so konstruiert, daß das n-tupel $(v_1,\ldots,v_n) \in K^n$ der Verhalten der mit $e_1,\ldots,e_n$ zusätzlich indizierten Knoten gerade der Funktionswert $\beta(u_1,\ldots,u_p)$ der Abbildung (12),(13) im Punkt $(u_1,\ldots,u_p)$ ist. Das Paar

(16) $((v_1,\ldots,v_n),(u_1,\ldots,u_p))$

ist jetzt das äußere Verhalten des Berechnungslaufs (15). Der Berechnung

(17) $\{B_{u_1 \ldots u_p};(u_1,\ldots,u_p) \in K^p\}$

ordnen wir wieder die durch $(u_1,\ldots,u_p) \longmapsto (v_1,\ldots,v_n)$ in (16) definierte Abbildung $K_p \to K_n$ zu, die wir das äußere Verhalten der Berechnung (17) nennen. Nach Konstruktion ist es die Abbildung (13). Wir nennen die mit den Variablen $x_1,\ldots,x_p$ markierten und mit den Buchstaben $a_1,\ldots,a_p$ zusätzlich indizierten Knoten von (14) die Argumentknoten, die mit den Buchstaben $e_1,\ldots,e_n$ zusätzlich indizierten Knoten heißen die Ergebnisknoten von (14).

Nach den letzten zwei Beispielen (6),S.viii und (14),S.xi sieht man, auf welche Weise uns derartige markierte gerichtete geordnete schleifenfreie endliche Graphen mit ausgezeichneten Argument- und Ergebnisknoten gewisse Abbildungen

(18) $A^p \to A^n$, $p,n \in \mathbb{N}$,

definieren, die wir als das äußere Verhalten der zugehörigen Berechnungen erhalten; A ist dabei die Grundmenge, über der wir operieren, oder mit anderen Worten, die Trägermenge der verwendeten Algebra. Mit Hilfe der „Ω-Mengen" in Strassen (1973) können dagegen Abbildungen der Art

$A^p \to \mathcal{P}(a)$, $p \in \mathbb{N}$, (wobei $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A ist)

definiert werden, wenn man Variablen zu den Operationszeichen der verwendeten Algebra adjungiert. Uns interessiert mehr die erste Art (18), weil sie in der Praxis vorkommt.

Als Beispiel eines Komplexitätsmaßes wollen wir wieder die argumentenunabhängige Länge aufführen. Seien allen nullstelligen

Operationen $\hat{b}_{ij}$ und den zweistelligen Operationen Addition und Multiplikation positive reelle Zahlen als ihre individuellen Komplexitäten zugeordnet. Wir bezeichnen mit L_B die Summe dieser Komplexitäten über alle nicht-Argumentknoten des Rechenschemas B (vgl.(14),S.xi). Ist $(u_1,\ldots,u_p)\in K^p$ ein p-tupel von Elementen von individuellen Komplexitäten $z_1,\ldots,z_p>0$, der Reihe nach, so ist analog zu oben

$$L_B+\sum_{i=1}^{p} z_i$$

die Länge des Berechnungslaufs $B_{u_1\ldots u_p}$. Wir beschränken uns wieder nur auf den Fall, daß man eine Berechnung von minimaler Länge mit dem äußeren Verhalten β sucht und deshalb die z_i's keine Rolle spielen. Als die Komplexität der Berechnung (17) nehmen wir dann die Zahl L_B. Das Vergleichskriterium wird hier wieder die Ordnungsrelation $\leq$ der reellen Zahlen sein. Wir bezeichnen mit

$$b(B):=\{B_{u_1\ldots u_p};(u_1,\ldots,u_p)\in K^p\}$$

die Berechnung nach dem Rechenschema B, mit

$$v(b(B)):=\beta:K^p\to K^n$$

ihr äußeres Verhalten und mit

$$k(b(B)):=L_B$$

ihre Komplexität. Sei jetzt C ein weiteres Rechenschema der gleichen Art mit n Argumentknoten und m Ergebnisknoten, $m\in N$, und seien

$$b(C)=\{C_{v_1\ldots v_n};(v_1,\ldots,v_n)\in K^n\}$$

die zugehörige Berechnung,

$$v(b(C))=\gamma:K^n\to K^m$$

ihr äußeres Verhalten und

$$k(b(B))=L_C$$

ihre Komplexität. Wir definieren das Produkt CB der Rechenschemata C und B als das dadurch entstandene Rechenschema, daß wir den Graphen C über den Graphen B legen und die n Argumentknoten von C mit den n Ergebnisknoten von B der Reihe nach identifizieren und mit den Marken der Ergebnisknoten von B markieren. Analog definieren wir das Produkt $C_{v_1\ldots v_n}B_{u_1\ldots u_p}$ zweier Berechnungsläufe, und zwar genau dann, wenn $((v_1,\ldots,v_n),(u_1,\ldots,u_p))$ das äußere Verhalten des Berechnungslaufs $B_{u_1\ldots u_p}$ ist; sonst ist das Produkt undefiniert. Man sieht leicht, daß das Produkt b(C)b(B) der Berechnungen (erklärt elementenweise, d.h. als die Menge der

Produkte derjenigen Berechnungsläufe, für die das Produkt definiert ist) genau die zum Rechenschema CB zugehörige Berechnung

$$b(CB)=\{(CB)_{u_1\ldots u_p};(u_1,\ldots,u_p)\in K^p\}$$

ist. Es ist klar, daß das äußere Verhalten dieser Berechnung die zusammengesetzte Abbildung

$$\gamma\circ\beta:K^p\longrightarrow K^m \qquad (\gamma \text{ nach } \beta)$$

ist, d.h.

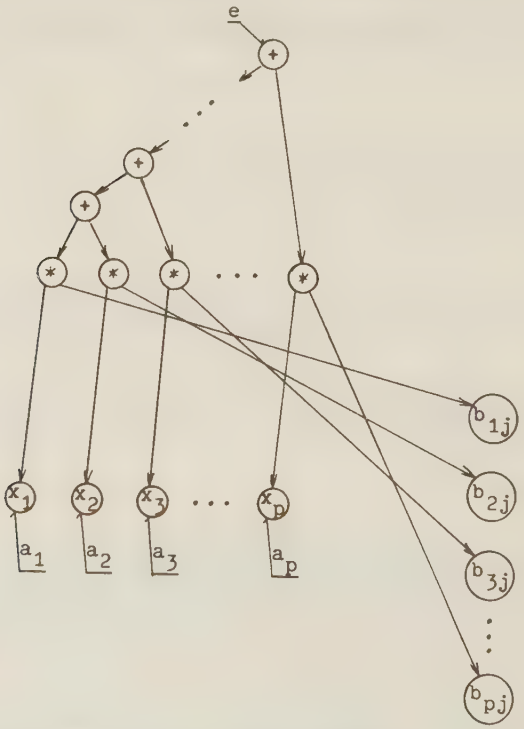
$$v(b(CB))=v(b(C)b(B))=v(b(C))\circ v(b(B)).$$

Für die Komplexität $k(b(CB))=L_{CB}$ gilt offensichtlich

$$k(b(CB))=L_C+L_B=k(b(C))+k(b(B)).$$

Sei jetzt für jedes $j\in\{1,\ldots,n\}$ B_j das Rechenschema

(19)



derselben Art wie (14),S.xi mit p Argument- und einem Ergebnisknoten und mit den Elementen der j-ten Spalte der Matrix $\langle\langle b_{ij}\rangle\rangle$ des Schemas B als den konstanten Zeichen, seien

$$b(B_j)=\{B_j,u_1\ldots u_p;(u_1,\ldots,u_p)\in K^p\}$$

die zugehörige Berechnung und

$$v(b(B_j))=\beta_j K^p\to K:(u_1,\ldots,u_p)\mapsto\sum_{i=1}^{p} b_{ij}u_i$$

ihr äußeres Verhalten. Wir definieren auf folgende Weise ein Rechenschema

$$\langle B_1,B_2,\ldots,B_n\rangle$$

mit p Argument- und n Ergebnisknoten: wir legen die Schemata B_1, $B_2,\ldots,B_n$ in dieser Ordnung nebeneinander und identifizieren dann für jedes $i\in\{1,\ldots,p\}$ die i-ten Argumentknoten aller n Schemata. Man sieht sofort, daß $B_1,\ldots,B_n$ genau das Rechenschema B (s. (14),S.xi) ist. Wir nennen diese Operation das Tupeln von Rechenschemata. Analog definieren wir

$$\langle B_1,u_1\ldots u_p,B_2,v_1\ldots v_p,\ldots,B_n,w_1\ldots w_p\rangle,$$

und zwar genau dann, wenn $(u_1,\ldots,u_p)=(v_1,\ldots,v_p)=\ldots=(w_1,\ldots,w_p)$; sonst bleibt das Tupeln von Berechnungsläufe undefiniert. Es ist klar, daß

$$\langle b(B_1),b(B_2),\ldots,b(B_n)\rangle$$

(erklärt elementenweise, als die Tupel derjenigen Berechnungsläufe, für die das Tupeln definiert ist) genau die Berechnung

$$b\langle B_1,B_2,\ldots,B_n\rangle$$

nach dem neuen Rechenschema $\langle B_1,B_2,\ldots,B_n\rangle$ ist. Das Tupeln der Abbildungen $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n:K^p\to K$ ist definiert durch

$$\langle\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\rangle(\varkappa):=(\beta_1(\varkappa),\beta_2(\varkappa),\ldots,\beta_n(\varkappa))\quad(\varkappa\in K^p).$$

Für die äußeren Verhalten gilt dann offensichtlich

$$v(b\langle B_1,\ldots,B_n\rangle)=v\langle b(B_1),\ldots,b(B_n)\rangle=\langle v(b(B_1)),\ldots,v(b(B_n))\rangle.$$

Sind $k(b(B_1))=L_{B_1},\ldots,k(b(B_n))=L_{B_n}$ die Komplexitäten von $b(B_1)$, $\ldots,b(B_n)$ (vgl.S.10), so ist

$$k(b\langle B_1,\ldots,B_n\rangle)=k\langle b(B_1),\ldots,b(B_n)\rangle=L_{B_1}+\ldots+L_{B_n}.$$

Wir fassen alles auf folgende Weise zusammen:
Sei für jedes $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ S_p^n die Menge aller Rechenschemata B mit p Argument- und n Ergebnisknoten der Art (14),S.xi. Wir haben für jedes $(m,n,p)\in\mathbb{N}^3$ eine zweistellige (heterogene) Operation

$$p_{m,n,p}:S_n^m\times S_p^n\to S_p^m:(C,B)\mapsto CB$$

und für jedes $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ eine n-stellige Operation

$$t_{n,p}:(S_p^1)^n\to S_p^n:(B_1,\ldots,B_n)\mapsto\langle B_1,\ldots,B_n\rangle,$$

wodurch eine (heterogene) Algebra (vgl. Higgins 1963, Birkhoff u. Lipson 1970)

$$\mathcal{S}=((S_p^n)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2};(p_{m,n,p})_{(m,n,p,)\in\mathbb{N}^3},(t_{1,p})_{p\in\mathbb{N}},(t_{2,p})_{p\in\mathbb{N}},$$
$$(t_{3,p})_{p\in\mathbb{N}},\ldots)$$

oder abgekürzt

(20) $\mathcal{S}=(\mathcal{S};\mu,\lambda)$

definiert ist, wenn wir $\mathcal{S}:=(S_p^n)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, $\mu:=(p_{m,n,p})_{(m,n,p)\in\mathbb{N}^3}$, $\lambda:=((t_{1,p})_{p\in\mathbb{N}},(t_{2,p})_{p\in\mathbb{N}},(t_{3,p})_{p\in\mathbb{N}},\ldots)$ setzen. Analog dazu sei für jedes $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ B_p^n die Menge aller Berechnungen b(C) nach Rechenschemata C aus S_p^n. Für jedes $(m,n,p)\in\mathbb{N}^3$ haben wir eine zweistellige Operation

$$p_{m,n,p}:B_n^m\times B_p^n\to B_p^n:(b(C),b(B))\mapsto b(C)b(B)$$

und für jedes $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ eine n-stellige Operation

$$t_{n,p}:(B_p^1)^n\to B_p^n:(b(B_1),\ldots,b(B_n))\mapsto\langle b(B_1),\ldots,b(B_n)\rangle,$$

wodurch eine Algebra

(21) $\mathcal{B}=(\mathcal{B};\mu,\lambda)$

vom gleichen Typ wie (20) definiert ist. Die Zuordnung $C\mapsto b(C)$, die jedem Schema die zugehörige Berechnung zuordnet, ist ein Homomorphismus

$$\lambda:(\mathcal{S};\mu,\lambda)\to(\mathcal{B};\mu,\lambda).$$

Wenn wir jetzt für jedes $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ mit $(K)_p^n$ die Menge aller linearen Abbildungen $\gamma:K^p\to K^n$ über dem Körper K bezeichnen, so bildet die Familie $(K):=((K)_p^n)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ zusammen mit den Familien von Operationen

$$p_{m,n,p}:(K)_n^m\times(K)_p^n\to(K)_p^m:(\gamma,\beta)\mapsto\gamma\circ\beta\quad((m,n,p)\in\mathbb{N}^3)$$
$$t_{n,p}:((K)_p^1)^n\to(K)_p^n:(\beta_1,\ldots,\beta_n)\mapsto\langle\beta_1,\ldots,\beta_n\rangle\quad((n,p)\in\mathbb{N}^2)$$

eine Algebra

(22) $(K)=((K);\mu,\lambda)$

vom gleichen Typ wie (20),(21). Die Zuordnung $b(C)\mapsto v(b(C))$, die

jeder Berechnung ihr äußeres Verhalten zuordnet, ist ein Homomorphismus

$$\nu:(\mathfrak{B};\mu,\lambda)\to((K);\mu,\lambda).$$

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen bildet zusammen mit der zweistelligen Operation

$$p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:(a,b)\mapsto a+b$$

und mit der Familie $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Operationen

$$t_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}:(a_1,\ldots,a_n)\mapsto a_1+\ldots+a_n$$

eine homogene Algebra $(R;p,(t_n)_{n\in\mathbb{N}})$, die man auf offensichtliche Weise als eine heterogene Algebra

$$(23)\quad \mathfrak{H}=((H_p^n)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2};\mu,\lambda)$$

vom gleichen Typ wie (20),(21) und (22) auffassen kann, mit jeder Trägermenge H_p^n gleich $\mathbb{R}$. Das obige Komplexitätsmaß $b(C)\mapsto k(b(C))$ von Berechnungen ist ein Homomorphismus

$$(24)\quad k:(\mathfrak{B};\mu,\lambda)\to((H_p^n)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2};\mu,\lambda).$$

Wir erinnern daran, daß wir die Trägermengen $H_p^n=\mathbb{R}$ der Zielalgebra in (24) zusammen mit der Ordnungsrelation $\leq$ betrachten, die für uns das Vergleichskriterium der Komplexitäten verschiedener Berechnungen darstellt. Wir nennen dann (23) eine komponentenweise halbgeordnete heterogene Algebra (vgl. Fuchs 1966/1964, 1965).

Die Algebren $\mathfrak{S},\mathfrak{B}$ (s.(20),(21)), die wegen ihrer Anschaulichkeit als Beispiel für die Einleitung gewählt sind, bestehen aus den auf S.xi beschriebenen speziellen Rechenschemata und aus den zugehörigen Berechnungen von linearen Abbildungen. Eine ähnliche Situation entsteht aber auch im Falle allgemeiner Berechnungen, wobei wir sogar Rechenprozesse mit heterogenen Operationen zulassen wollen. In der Praxis wird nämlich sehr oft mit Daten verschiedener Art gearbeitet. Die Rechenschemata (markierte gerichtete geordnete Graphen mit ausgezeichneten Argument- und Ergebnisknoten, wie in den obigen Beispielen) müssen dann noch zusätzlich die Information über den Typ der zu verarbeitenden Daten enthalten. Seien z.B. S ein nichtleerer Indexbereich und $X=(X_s)_{s\in S}$ eine Familie von Trägermengen, über denen wir operieren. Eine heterogene Operation

$$X_{t_1}\times X_{t_2}\times\ldots\times X_{t_p}\to X_s,\quad t_1,t_2,\ldots,t_p,s\in S,$$

wird im Rechenschema durch ein Operationszeichen ω dargestellt, bei dem wir jetzt nicht nur seine Stellenzahl p wie früher, sondern auch die Typen $t_1,t_2,\ldots,t_p$ der Argumente und den Typ s des

Ergebnisses als seine Unterscheidungsmerkmale betrachten müssen. Wenn S^* das Monoid aller Wörter über dem Alphabet S bezeichnet, so wollen wir das Paar

$$(s,t_1t_2\ldots t_p)\in S\times S^* \quad \text{(in dieser Reihenfolge!)}$$

als den Typ des Operationszeichens ω betrachten. Es ist klar, daß man jetzt beim Entwurf von Rechenschemata zusätzlich auf den Typ der Operationszeichen jedes Knoten und seiner direkten Nachfolger achten muß. Wir nennen derartige Rechenschemata heterogen. Das äußere Verhalten der Berechnung nach einem heterogenem Rechenschema mit p Argument- und n Ergebnisknoten wird jetzt eine Abbildung

$$X_{t_1}\times X_{t_2}\times\ldots\times X_{t_p}\rightarrow X_{s_1}\times X_{s_2}\times\ldots\times X_{s_n}, \quad t_1,\ldots,t_p,s_1,\ldots s_n\in S,$$

sein. Wir nennen dann das Paar

$$(s_1s_2\ldots s_n,t_1t_2\ldots t_p)\in S^{*2} \quad \text{(in dieser Ordnung!)}$$

den Typ des Rechenschemas bzw. der Berechnung. Bei der Betrachtung der algebraischen Strukturen, die wir oben am Beispiel linearer Abbildungen angedeutet haben, bereitet diese Verallgemeinerung keine besonderen Schwierigkeiten. Wir brauchen lediglich die Familien von Trägermengen und Operationen unserer Algebren von Rechenschemata, Berechnungen usw. (vgl. die Algebren (20), (21),(22),(23) mit Wörtern $\sigma,\tau\in S$, $\sigma=s_1s_2\ldots s_n$, $\tau=t_1t_2\ldots t_p$ anstatt mit natürlichen Zahlen $n,p\in\mathbb{N}$ wie im homogenen Fall zu indizieren.

Die obige graphische Darstellung von Rechenschemata für algebraische Berechnungen erinnert an eine andere und in der Mathematischen Informatik nicht minder wichtige Art von Schemata, nämlich die Programmschemata in ihrer Darstellung durch Flußdiagramme. Programmschemata beschreiben Rechenprozesse, die jetzt i.a. Verzweigungen und Schleifen enthalten. Zur Klarstellung soll vielleicht gesagt werden, daß sich hierbei nicht um die sequentiellen Prozesse handelt, die in Schaltwerken mit Schleifen und Verzögerungselementen entstehen. Wir zeigen ein einfaches Beispiel.

Seien $\{f_1,f_2,\ldots\}$ und $\{p_1,p_2,\ldots\}$ zwei disjunkte Mengen, deren Elemente wir Operationszeichen und Prädikatszeichen nennen. Wir wollen zunächst alle Operations- und Prädikatszeichen als einstellig im folgenden Sinne betrachten: bei der Interpretation wird eine Grundmenge X festgelegt, die z.B. als die Menge aller im arithmetischen Register eines einfachen Rechners darstellbaren Zahlen verstanden werden kann. Die Operationszeichen $f_1,f_2,\ldots$ werden dann als gewisse einstellige Operationen

$$(25)\quad \tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\ldots:X\rightarrow X$$

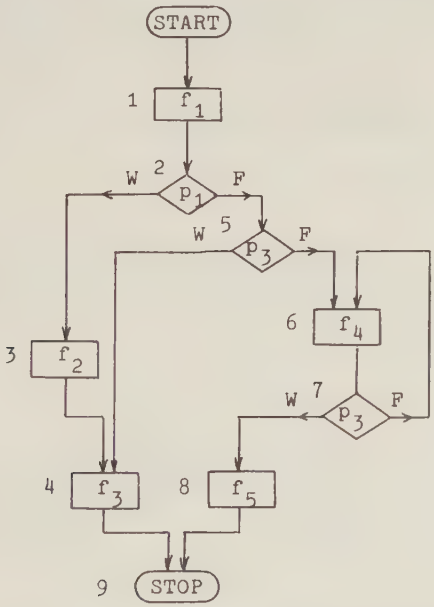
aus dem Repertoir des Rechners interpretiert, die Prädikatszei-

chen $p_1, p_2, \ldots$ als gewisse Prädikate (Tests)

(26) $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots : X \to \{W, F\}$

über X mit zwei möglichen Wahrheitswerten W,F. Folgendes Flußdiagramm definiert uns ein einfaches Programmschema P:

(27)



Es ist wieder ein markierter gerichteter geordneter endlicher Graph, jetzt allerdings nicht mehr schleifenfrei. Weil die verwendeten Operations- und Prädikatszeichen einstellig sind, nennt man das Programmschema monadisch. Eine andere mögliche Darstellung des Programmschemas P ist die (nichtgeordnete) Aufzählung aller Programmschritte zusammen mit Angabe ihrer gegenseitigen Abhängigkeit, d.h. des Steuerflußes zwischen ihnen:

(28) START L_1; f_1; L_2 $\quad$ L_6; f_4; L_7
L_2; p_1; L_3, L_5 $\quad$ L_7; p_3; L_8, L_6
L_3; f_2; L_4 $\quad$ L_8; f_5; L_9
L_4; f_3; L_9 $\quad$ L_9; STOP.
L_5; p_2; L_4, L_6

Damit die Analogie mit den Rechenschemata vollständig ist, be-

trachten wir (START) im Flußdiagramm (27) als eine zusätzliche

Indizierung des Knoten 1 zur Kennzeichnung der Eingangsstelle der Steuerung des Rechners bei der Durchführung des durch das Programmschema P definierten Rechenprozeßes. Wir nennen diesen Knoten den Eingangsknoten von P. Der Knoten 9 mit der speziellen Marke STOP (die von den Operations- und Prädikatszeichen verschieden ist) bedeutet die Ausgangsstelle der Steuerung aus dem durch P definierten Rechenprozeß. Wir nennen diesen Knoten den Ausgangsknoten von P. Wie aus der Aufzählung (28) ersichtlich ist, kann man auch im Flußdiagramm (27) mit nur einer Art von Knoten auskommen. Für unsere Zwecke ist der Unterschied zwischen Operationen und Prädikaten unwesentlich: jedem Prädikat $\tilde{p}:X \longrightarrow \{W,F\}$ können wir eineindeutig die Abbildung

(29) $\tilde{\tilde{p}}:X\to X\times\{W,F\}:x\mapsto(x,W)$ falls $\tilde{p}(x)=W$

$x\mapsto(x,F)$ falls $\tilde{p}(x)=F$

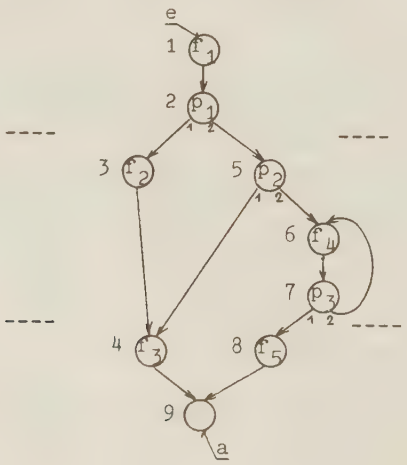
zuordnen. Anstatt der zweielementigen Menge $\{W,F\}$ der Wahrheitswerte verwenden wir noch die Mengen $\{1,2,\ldots,r\}$ ($r\in\mathbb{N}$), um auch mehrwertige Prädikate zulassen zu könnenn, und definieren allgemein:

Eine (einstellige) Instruktion g über X mit r Ausgängen ist eine Abbildung

(30) $g:X\to X\times\{1,2,\ldots,r\}$, $r\in\mathbb{N}$.

Es ist klar, daß man die Operationen $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\ldots$ (s.(25),S.xviii) als Instruktionen $X\to X\times\{1\}$ mit einem Ausgang betrachten kann. Statt der Prädikate $\tilde{p}_1,\tilde{p}_2,\ldots$ (s.(26),S.xix) verwenden wir die Instruktionen $\tilde{\tilde{p}}_1,\tilde{\tilde{p}}_2,\ldots:X\to X\times\{1,2\}$ (s.(29),S.xx). Das Programmschema P wird jetzt dargestellt durch den Graphen

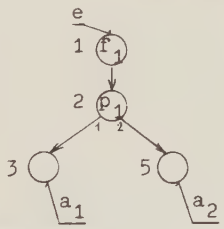
(31)



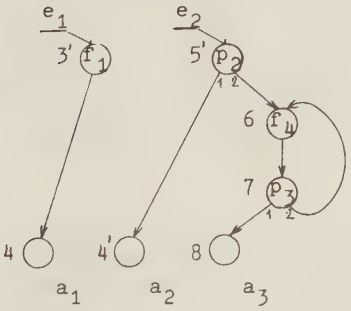
Den Ausgangsknoten haben wir jetzt mit dem Buchstabe a indiziert. Der Index e tritt jetzt an die Stelle der ursprünglichen Indizierung des Eingangsknoten durch START.

Aus der sicht des modularen Aufbaus von Programmschemata (sog. „struktuierte Programmierung") ist es zweckmäßig auch Programmschemata mit mehreren Eingangs- und Ausgangsknoten zuzulassen. Will man z.B. das Mittelstück des Programmschemas P zwischen den gestrichelten linien in (31) als einen Teil anderer Programmschemata verwenden, so kann man P als ein aus den folgenden drei Schemata zusammengesetztes Programmschema betrachten:

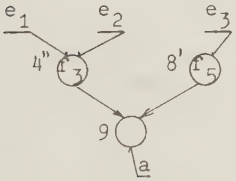
(32)



(33)



(34)



Die Zusammensetzung entspricht genau dem oben betrachteten Produkt von Rechenschemata.

Für die Trägermenge X der Instruktionen haben wir als Beispiel die Menge aller möglichen Inhalte des einzigen arithmetischen Registers eines sehr einfachen Rechners genannt. In komplizierteren Fällen spielt X die Rolle der Menge aller möglichen Inhalte aller Register und aller Speicherplätze im Arbeitsspeicher

eines Rechners, die wir als eine heterogene Mengenfamilie

$$X=(X_s)_{s\in S}$$

über einem nichtleeren Indexbereich S betrachten. Die meisten Instruktionen werden dabei nur auf einigen wenigen Mengen dieser Familie operieren. Wir bezeichnen mit

$$T:=S^*$$

das Monoid aller Wörter über dem Alphabet S und setzen

$$Y_\sigma:=X_{s_1}\times X_{s_2}\times\ldots\times X_{s_n}\quad(\sigma=s_1s_2\ldots s_n\in S^*)\quad\text{und}\quad Y:=(Y_\sigma)_{\sigma\in T}.$$

Man sieht jetzt, daß wir statt mehrstelligen Instruktionen über der Mengenfamilie X einstellige heterogene Instruktionen

$$(35)\quad Y_\sigma\to\{(y,j);y\in Y_{\tau_j},j\in\{1,2,\ldots,r\}\},\ (\sigma;\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_r)\in T\times T^r,\ r\in\mathbb{N},$$

betrachten können. Das Paar $(\sigma;\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_r)$ nennen wir den Typ der Instruktion (35). Die Programmschemata, die uns derartige Rechenprozeße mit heterogenen Instruktionen beschreiben, nennen wir ebenfalls heterogen. Bei den Instruktionszeichen in heterogenen Schemata müssen wir ihren Typ beachten, ein Paar von Indizes der Art $(\sigma;\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_r)$ wie oben, der beim Entwurf von Programmschemata zu berücksichtigen ist, genauso wie es bei den heterogenen Rechenschemata der Fall war. Die mit Programmschemata verbundene Begriffe Berechnung, ihr äußeres Verhalten und Komplexität untersuchen wir im Deteil im weiteren Text. Auch in diesem Fall existiert eine gemeinsame algebraische Struktur der genannten Objekte, wie bereits bei den Rechenschemata und den zugehörigen Berechnungen.

Nach dieser informellen Einführung, in der wir auf Gemeinsamkeiten zwischen Rechenschemata und Programmschemata hingewiesen haben, wollen wir zunächst für sie eine einheitliche Theorie aufbauen. In §2 definieren wir heterogene Berechnungsgraphen als diejenigen markierten Graphen mit gewissen Zusatzeigenschaften, deren Beispiele wir hier gezeigt haben. Dann untersuchen wir die mittels dieser Graphen dargestellten Schemata und ihr sog. freies äußeres Verhalten, wichtig für die Interpretationen von Schemata in §5. §3 beschäftigt sich mit dem Studium der algebraischen Struktur von Schemata, wobei gleichzeitig ihre Auswirkungen auf das freie äußere Verhalten von Schemata beachtet wird. In §4 bringen wir zwei für die folgenden Paragraphen wichtige Sätze. In §5 werden dann die Begriffe Programm, Berechnung, das äußere Verhalten einer Berechnung und die durch eine Berechnung definierte (realisierte) Abbildung definiert und ihre Eigenschaften werden für die beiden hier in der Einleitung skizzierten Fälle untersucht: für die (schleifen- und verzweigungsfreien) algebraischen Berechnungen und für die (monadischen) Programmberechnungen. In §6 kombinieren wir die beiden Berechnungen auf eine spezielle Weise, um auch allgemeinere Rechenprozeße zu erfassen („algebraische Berechnungen mit Verzweigungen und Schleifen" oder gewisse i.a. nichtmonadische Programmberechnungen). §7 ist der

Komplexität gewidmet. Wir untersuchen eine Klasse von Komplexitätsmaßen von Berechnungen, die die gemeinsame algebraische Struktur von Schemata, Berechnungen und ihres äußeren Verhaltens wiedergeben. Für diese Komplexitätsmaße gewinnen wir einige zu Strassen (1972) analoge Resultate für unsere Berechnungen.

§2. Schemata

Seien S eine nichtleere Menge und S^* das Monoid aller Wörter über dem Alphabet S einschliesslich des leeren Wortes ε (d.h. das freie Monoid über S mit Hintereinanderschreiben als Verknüpfung und mit der Einheit ε). S^+ ist $S^* \setminus \{\varepsilon\}$, die freie Halbgruppe aller nichtleeren Wörter über S. Wir werden mit r,s,t,... die Elemente aus S und mit $\sigma,\tau,\ldots$ die Wörter aus S^* bezeichnen. Wenn wir also $\sigma = s_1 s_2 \ldots s_n \in S^*$ schreiben, so soll es immer bedeuten, daß $s_1, s_2, \ldots, s_n$ Elemente aus S sind, wobei der Fall $n=0$ d.h. $\sigma = \varepsilon$ nicht ausgeschlossen ist; die Zahl n heißt dann die Länge des Wortes und wird mit $l(\sigma)$ bezeichnet. Mit S^n, $n \geq 0$, bezeichnen wir die Menge aller Wörter über S der Länge n; es ist dann $S^0 = \{\varepsilon\}$.

Sei $\{\Omega^S_\tau ; s \in S, \tau \in S^*\}$ eine Klasse von paarweise disjunkten Mengen Ω^S_τ und sei

$$(1) \quad \Omega := \bigcup_{s \in S, \tau \in S^*} \Omega^S_\tau$$

ihre Vereinigung. Wir nennen Ω eine Zeichenmenge, S ist der Indexbereich von Ω. Jedes Element $\omega \in \Omega^S_\tau$ nennen wir ein Zeichen vom Eingangstyp s und Ausgangstyp τ, das Paar (s,τ) heißt der Typ von ω. Wir bezeichnen noch für $m \in N_0 := N \cup \{0\}$

$$(2) \quad \Omega_m := \bigcup_{s \in S, \tau \in S^m} \Omega^S_\tau$$

und nennen die Elemente aus Ω_m Zeichen vom Rang m.

Wir wollen für jedes $s \in S$ zu der Menge Ω^S_ε noch zwei neue Elemente als Zeichen vom Typ (s,ε) hinzufügen. Als diese zwei neue Zeichen wählen wir der Einfachkeit halber den Index s selbst und das Paar (s,0) mit der Zahl 0. Deshalb nehmen wir im Folgenden an, daß $s, (s,0) \notin \Omega$ für alle s aus S gilt. Seien

$$\tilde{\Omega}^S_\varepsilon := \Omega^S_\varepsilon \cup \{s, (s,0)\} \quad (s \in S)$$

$$\tilde{\Omega}^S_\tau := \Omega^S_\tau \qquad (s \in S, \tau \in S^+).$$

Die neue Zeichenmenge

(3) $\tilde{\Omega} := \bigcup_{s\in S,\tau\in S^*} \tilde{\Omega}^s_\tau$

über dem Indexbereich S bezeichnen wir mit $\Omega_{S\cup S\times\{0\}}$ und sagen, sie sei aus Ω durch Adjunktion von $S\cup S\times\{0\}$ entstanden.

Für jedes $n\in\mathbb{N}_0$ bezeichnen wir mit $[n]$ die Menge $\{1,2,\ldots,n\}$; es ist dann $[0]=\emptyset$, $[1]=\{1\}$ usw.

Ist K eine Menge, so bezeichnen wir mit K^n, $n\in\mathbb{N}$, auch das n-fache kartesische Produkt von K; K^0 ist $\{\emptyset\}$. Unter einem n-tupel von Elementen aus K, $n\geq 0$, verstehen wir im Falle n=0 die leere Menge $\emptyset$. Mit $\mathcal{P}(K)$ bezeichnen wir die Potenzmenge von K.

Ist I eine Menge und ist für jedes $i\in I$ M_i eine Menge, so verstehen wir unter der Familie $\mathcal{M}=(M_i)_{i\in I}$ die Menge $\mathcal{M}=\{(i,M_i);i\in I\}$, die als Elemente Paare (i,M_i) hat. Wir nennen I einen Indexbereich und $\mathcal{M}$ eine Mengenfamilie über I. Beim Umgang mit Mengenfamilien über I werden wir unter einer komponentenweisen Inklusion

(4) $(M_i)_{i\in I} \subseteq (N_i)_{i\in I}$

die Familie von Relationen $M_i\subseteq N_i$ $(i\in I)$ verstehen. Analog dazu der komponentenweise Durchschnitt bzw. die komponentenweise Vereinigung. Eine komponentenweise Abbildung $(M_i)_{i\in I}\to(N_i)_{i\in I}$ ist eine Familie von Abbildungen $f_i:M_i\to N_i$ $(i\in I)$. Ist $J\subseteq I$, und ist $\mathcal{M}=(M_i)_{i\in I}$ eine Mengenfamilie über I, so ist $\mathcal{M}_{|J}:=(M_i)_{i\in J}$.

2.1. Berechnungsgraphen

Definition.

Ein Berechnungsgraph B über Ω ist bestimmt durch

(5) eine endliche Menge K; die Elemente aus K heißen die Knoten von B;

(6) eine Abbildung $e:[n]\to K$, $n\in\mathbb{N}_0$; das Bild $e_i:=e(i)\in K$ von $i\in[n]$ heißt der i-te Eingang von B;

(7) eine injektive Abbildung $a:[p]\to K$, $p\in\mathbb{N}_0$; das Bild $a_j:=a(j)\in K$ von $j\in[p]$ heißt der j-te Ausgang von B;

(8) eine Abbildung $\gamma:K\to\bigcup_{m\geq 0}(\tilde{\Omega}_m\times K^m)$, die jedem Knoten $k\in K$ ein Zeichen aus $\tilde{\Omega}=\Omega_{S\cup S\times\{0\}}$ von einem Rang $m\geq 0$ zuordnet, genannt die Marke von k, zusammen mit einem m-tupel $(k_1,\ldots,k_m)$ von Knoten, genannt die direkten Nachfolger von k, mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $(\gamma(k)=(\omega, k_1,\ldots,k_m), \omega\in\tilde{\Omega}^{s}_{u_1\ldots u_m} \iff$

$\iff \gamma(k_i)=(\omega_i,\ldots), \omega_i\in\tilde{\Omega}^{u_i}_{\sigma_i}, (i\in[m])),$

mit gewissen $s,u_1,\ldots,u_m$ aus S und $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$ aus S^*;

(b) $\gamma(k)=(t), t\in S \iff k=a_i, i\in[p].$

Ist $\gamma(e_i)=(\omega_i,\ldots), \omega_i\in\tilde{\Omega}^{s_i}_{\tau_i}, s_i\in S, \tau_i\in S^*, (i\in[n])$, so heißt das Wort $\sigma=s_1\ldots s_n\in S^*$ der Eingangstyp von B. Ist $\gamma(a_j)=(t_j)$, $t_j\in S$, $(j\in[p])$, so heißt das Wort $\tau=t_1\ldots t_p$ der Ausgangstyp von B. Das Paar (σ,τ) ist der Typ von B. B heißt homogen, wenn card(S)=1. Die binäre Relation $\nu\subseteq K^2$ definiert durch

(9) $(\gamma(k)=(\omega, k_1,\ldots,k_m) \iff: (k,k_i)\in\nu \ (i\in[m])), \omega\in\tilde{\Omega},$

heißt die direkt-Nachfolger-Relation von B. Der Berechnungsgraph B heißt schleifenfrei, wenn die transitive Hülle

(10) $\nu^+=\nu\cup\nu^2\cup\nu^3\cup\ldots$

von ν in K^2 antireflexiv ist, d.h. $(k,k)\notin\nu^+$ $(k\in K)$. Die nicht-Ausgang-Knoten von B ohne direkte Nachfolger heißen Nullknoten von B. Ein schleifenfreier Berechnungsgraph B heißt Ω_0-total, wenn alle Nullknoten von B mit Zeichen aus Ω_0 markiert sind, total, wenn es in B keine Nullknoten gibt. Der Grad eines Berechnungsgraphen ist die Anzahl seiner nicht-Ausgang-Knoten.

Zur Erläuterung der Definition sei auf die Beispiele in der Einleitung hingewiesen. Die Abbildung γ in (8) charakterisiert B als einen markierten geordneten gerichteten endlichen Graphen, indem sie jedem Knoten $k\in K$ seine Marke, ein Zeichen ω aus $\tilde{\Omega}=\Omega_{S\cup S\times\{0\}}$ von einem Rang $m\geq 0$ und seine direkten Nachfolger $k_1,\ldots,k_m$ (mit ihrer Anordnung) bestimmt. Die Bedingung (8)(a) gibt dabei den Typ der Zeichen an, welche den Knoten k und seine direkten Nachfolger markieren dürfen: ist $u_1\ldots u_m\in S^*$ der Ausgangstyp von ω, so muß die Marke von k_i vom Eingangstyp u_i sein. Die injektive Abbildung in (7) zeichnet in K p paarweise verschiedene Knoten aus, die Ausgänge $a_1,\ldots,a_p$ von B. Nach (8)(b) sind die Ausgänge ohne direkte Nachfolger und sind mit einigen der zu Ω_0 neu zugefügten Zeichen $s,t,\ldots\in S$ markiert; kein anderer Knoten von B hat eine solche Marke. Die Marken $t_1,\ldots,t_p$ von $a_1,\ldots,a_p$ bilden den Ausgangstyp $\tau=t_1\ldots t_p$ von B (vgl. die Argumentknoten und den Typ ihrer Variablen bei den heterogenen Rechenschemata in der Einleitung). Die Abbildung in (6) zeichnet unter den

Knoten von B n Eingänge $e_1,\ldots,e_n$ aus, nicht notwendig alle voneinander verschieden (vgl. die Ergebnisknoten bei den Rechenschemata bzw. die Eingangsknoten bei den Programmschemata in der Einleitung). Die Eingangstypen $s_1,\ldots,s_n$ der Marken der Eingänge bilden den Eingangstyp $\sigma=s_1\ldots s_n$ von B. Ist der Berechnungsgraph homogen, so ist die Bedingung (8)(a) gegenstandslos; der Eingangs- und der Ausgangstyp bzw. der Typ von B sind dann nichtnegative ganze Zahlen n,p bzw. das Paar (n,p). Es kann in einem Berechnungsgraphen außer seinen Ausgängen noch andere Knoten ohne direkte Nachfolger geben. Wir nennen sie dann Nullknoten von B. Sie sind mit Zeichen aus $\widetilde{\Omega}_o$ markiert, und zwar wegen (8)(b) nur mit den Zeichen aus Ω_o oder mit den neu zugefügten Zeichen (s,0) mit irgendeinem s aus S. In einem schleifenfreien Ω_o-totalen Berechnungsgraphen gibt es keine Marke (s,0). In einem schleifenfreien totalen Berechnungsgraphen gibt es überhaupt keine Nullknoten, insbesondere ist also ein totaler Berechnungsgraph Ω_o-total.

Nach Definition ist ein Berechnungsgraph durch die Knotenmenge K und durch die Abbildungen e,a und γ bestimmt; wir werden deshalb auch von dem Viertupel (K,e,a,γ) als von einem Berechnungsgraphen sprechen.

Definition.
Seien $B=(K,e,a,\gamma)$, $B'=(K',e',a',\gamma')$ zwei Berechnungsgraphen über Ω vom gleichen Typ $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$. B und B' heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi:K\to K$ gibt mit den Eigenschaften

(a) $\varphi(e_i)=e'_i \quad (i\in[1(\sigma)])$

(b) $\varphi(a_j)=a'_j \quad (j\in[1(\tau)])$

(c) $(\gamma(k)=(\omega, k_1,\ldots,k_m) \iff \gamma'(\varphi(k))=(\omega,\varphi(k_1),\ldots,\varphi(k_m)))$,
$\omega\in\widetilde{\Omega}_m, m\geq 0 \quad (k\in K)$.

2.2. Schemata

Indem wir einen Berechnungsgraphen mittels der Abbildung γ definieren, befreien wir uns von gewissen notationellen Willkürlichkeiten, die in seiner Darstellung durch die „Aufzählung" oder die „Zeichnung" (wie in der Einleitung) vorhanden sind. Da auch die spezielle Wahl der Knoten für die darzustellende Struktur ohne Bedeutung ist, oder anders gesagt, da für die Darstellung eines Rechen- oder Programmschemas alle isomorphen Berechnungsgraphen gleich geeignet sind, gehen wir zu ihren Isomorphieklassen über.

Definition.
Jede Isomorphieklasse von Berechnungsgraphen vom Typ $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$ über Ω heißt ein Schema vom Typ (σ,τ) über Ω.

Wir bezeichnen künftig mit $\overline{B}$ die Isomorphieklasse eines Berechnungsgraphen B. Um mengentheoretische Schwierigkeiten zu wermeiden, könnten wir auf offensichtliche Weise die Isomorphieklasse $\overline{B}$ eines Berechnungsgraphen $B=(K,e,a,\gamma)$ vom Typ $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$ über Ω durch die nichtnegativen ganzen Zahlen $k=\mathrm{card}(K)$, $n=l(\sigma)$, $p=l(\tau)$ und die entsprechenden Abbildungen e',a',γ' mit den Definitionsbereichen $[k]$,$[n]$ und $[p]$ charakterisieren.

Den Grad eines Schemas sowie die Begriffe schleifenfrei, $\Omega_\circ$-total und total übertragen wir auf Schemata von ihren Repräsentanten. Für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$ bezeichnen wir mit

$S_\Omega(\sigma,\tau)$ die Menge aller Schemata

$S_\Omega^{sf}(\sigma,\tau)$ " " " schleifenfreien Schemata

$S_\Omega^{sf,\Omega_\circ t}(\sigma,\tau)$ " " " " $\Omega_\circ$-totalen Schemata

$S_\Omega^{sf,t}(\sigma,\tau)$ " " " " totalen Schemata

vom Typ (σ,τ) über Ω. Wir setzen

$$\mathcal{S}_\Omega := (S_\Omega(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$$

und nennen die Familie $\mathcal{S}_\Omega$ Schemata über Ω. Analog dazu definieren und nennen wir die Familien

$$\mathcal{S}_\Omega^{sf},\ \mathcal{S}_\Omega^{sf,\Omega_\circ t},\ \mathcal{S}_\Omega^{sf,t}$$

über dem Indexbereich S^{*2}. Nach Definition gilt

$$\mathcal{S}_\Omega^{sf,\Omega_\circ t},\mathcal{S}_\Omega^{sf,t} \subseteq \mathcal{S}_\Omega^{sf} \subseteq \mathcal{S}_\Omega,$$

komponentenweise, und da jedes schleifenfreie totale Schema über Ω $\Omega_\circ$-total ist, gilt noch

$$\mathcal{S}_\Omega^{sf,t} \subseteq \mathcal{S}_\Omega^{sf,\Omega_\circ t},$$

komponentenweise.

2.3. Wege in Berechnungsgraphen

Sei

(11) $\Sigma_{\tilde{\Omega}} := \tilde{\Omega}_\circ \cup \{(\omega,i);\omega\in\Omega_\tau^s,\ s\in S,\ \tau=t_1\ldots t_m\in S^+,\ i\in[m]\}$.

Die Elemente aus $\Sigma_{\tilde{\Omega}}$ sind also entweder Zeichen aus $\tilde{\Omega}=\Omega_{S\cup S\times\{O\}}$ vom Typ (s,ε) (d.h. Zeichen aus Ω_ε^s und die neu zugefügten Zeichen s und (s,O)) mit irgendeinem s aus S, oder sind es Paare (ω,i) mit $\omega\in\Omega_\tau^s$, $s\in S$, $\tau=t_1\ldots t_m\in S^+$ und mit $i\in[m]$; im letzteren Fall nennen

wir s bzw. t_i den Eingangs- bzw. den Ausgangstyp von (ω,i), das Paar (s,t_i) ist der Typ von (ω,i).

Sei $B=(K,e,a,\gamma)$ ein Berechnungsgraph über Ω. Eine endliche Folge

(12) $\alpha=(k_1,(\omega_1,i_1),k_2,(\omega_2,i_2),\ldots,k_r,(\omega_r,i_r),k_{r+1})$, $r\geq 1$,

wobei $k_1,k_2,\ldots,k_r,k_{r+1}\in K$ und $(\omega_j,i_j)\in\Sigma_{\tilde{\Omega}}\setminus\tilde{\Omega}_0$ $(j\in[r])$ sind, heißt ein Weg in B von k_1 nach k_{r+1}, wenn

$$\gamma(k_j)=(\omega_j,\ l_1,\ldots,l_{i_j},\ldots,l_{m_j}),\ l_{i_j}=k_{j+1},\ m_j\geq 1,\ l_1,\ldots,l_{m_j}\in K$$
$$(j\in[r])$$

gilt, d.h. wenn für jedes $j\in[r]$ ω_j die Marke und k_{j+1} der i_j-te direkte Nachfolger des Knoten k_j sind. k_1 heißt der Anfang von α, k_{r+1} das Ende von α. Die Zahl r heißt die Länge von α. Das Wort

(13) $(\omega_1,i_1)(\omega_2,i_2)\ldots(\omega_r,i_r)=:m(\alpha)$

über dem Alphabet $\Sigma_{\tilde{\Omega}}$ heißt die Marke von α. Zusätzlich wollen wir auch eine Folge

(14) $\alpha=(k_1,(\omega_1,i_1),k_2(\omega_2,i_2),\ldots,k_r,(\omega_r,i_r),k_{r+1},\omega_{r+1})$, $r\geq 0$,

einen Weg in B von k_1 nach k_{r+1} nennen, wenn $k_{r+1}\in K$, $\omega_{r+1}\in\tilde{\Omega}_0$ sind, mit $\gamma(k_{r+1})=(\omega_{r+1})$, und wenn im Falle $r>0$

$$(k_1,(\omega_1,i_1),k_2,(\omega_2,i_2),\ldots,k_r,(\omega_r,i_r),k_{r+1})$$

ein Weg (12) in B von k_1 nach k_{r+1} ist. Wir nennen auch hier k_1 den Anfang, k_{r+1} das Ende, r die Länge und das Wort

(15) $(\omega_1,i_1)(\omega_2,i_2)\ldots(\omega_r,i_r)\omega_{r+1}=:m(\alpha)$

über $\Sigma_{\tilde{\Omega}}$ die Marke des Weges α.

Ein Weg (12) in B mit $k_1=k_{r+1}$ heißt eine Schleife. Man sieht leicht, daß ein Berechnungsgraph genau dann schleifenfrei ist, wenn in ihm keine Schleifen existieren.

Sind $\alpha=(k_1,(\omega_1,i_1),k_2,(\omega_2,i_2),\ldots,k_{r+1})$ und $\beta=(k_{r+1},(\omega_{r+1},i_{r+1}),\ldots)$ zwei Wege in B, so definieren wir

(16) $\alpha\beta:=(k_1,(\omega_1,i_1),k_2,(\omega_2,i_2),\ldots,k_{r+1},(\omega_{r+1},i_{r+1}),\ldots)$.

Es ist klar, daß $\alpha\beta$ wieder ein Weg in B ist. Für die Marken gilt offensichtlich

$$m(\alpha\beta)=m(\alpha)m(\beta)\quad\text{in }\Sigma_{\tilde{\Omega}}^{*}.$$

Nicht alle Wörter über dem Alphabet $\Sigma_{\tilde{\Omega}}$ werden als Marken von Wegen in Berechnungsgraphen über Ω auftreten. Nach der Bedingung

(8)(a),S.3 stimmt in einem Weg immer der Ausgangstyp des Buchstaben (ω_j,i_j) mit dem Eingangstyp von (ω_{j+1},i_{j+1}) bzw. ω_{r+1} überein. Die Menge aller solchen „richtig zusammengesetzten" Wörter, deren Buchstaben einen Eingangstyp und einen Ausgangstyp haben, ist in der Algebra durch den Begriff einer freien Kategorie erfaßt: die Typen $s,t,\ldots\in S$ sind Objekte, ein Buchstabe $(\omega,i)\in \Sigma_{\tilde{\Omega}}\setminus\tilde{\Omega}_0$ vom Eingangstyp s und Ausgangstyp t ist ein Morphismus von s nach t. Das „richtige" Hintereinanderschreiben von Buchstaben ist die Komposition von Morphismen. Außerdem nehmen wir die Zahl 0 als ein Objekt; die Marken $\omega\in\Omega_\varepsilon^s$ und $(s,0)$ der Nullknoten sind dann Morphismen von s nach 0. Die Marken $s\in S$ der Ausgänge werden die Rolle des leeren Wortes in einem freien Monoid spielen; hier sind es die Einheitsmorphismen $1_s:s\to s$. Wir nehmen also o.E. d.A. $S\cap\{0\}=\emptyset$ und bezeichnen mit

(17) $(\Sigma_{\tilde{\Omega}})$

die freie Kategorie mit den Objekten $s,t,\ldots\in S$ und mit dem Objekt 0, die durch die Morphismen

$$(\omega,i):s\to t \quad \text{mit } \omega\in\Omega^s_{u_1\ldots u_m}, \text{ mit irgendeinem } u_1\ldots u_m\in S^* \text{ mit } u_i=t,$$

für jedes Objektenpaar $(s,t)\in S^2$ und durch die Morphismen

$$\omega:s\to 0 \quad \text{mit } \omega\in\Omega^s_\varepsilon \text{ und}$$

$$(s,0):s\to 0$$

für jedes Objekt $s\in S$ generiert ist. Für die Einheitsmorphismen schreiben wir $s=1_s:s\to s$ $(s\in S)$ und $0=1_0:0\to 0$.

Da wir uns für gewisse Mengen von Marken von Wegen in Berechnungsgraphen über Ω interessieren werden, bezeichnen wir für jedes Paar von Objekten $(v,w)\in \mathrm{Obj}(\Sigma_{\tilde{\Omega}})^2$ mit

(18) $(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})(v,w) := \mathcal{P}((\Sigma_{\tilde{\Omega}})(v,w))$

die Potenzmenge der Morphismenmenge $(\Sigma_{\tilde{\Omega}})(v,w)$ aller Morphismen $v\to w$ aus $(\Sigma_{\tilde{\Omega}})$, und setzen

(19) $(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}) := ((\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})(v,w))_{(v,w)\in \mathrm{Obj}(\Sigma_{\tilde{\Omega}})^2}.$

Wir betten noch für jedes (v,w) $\mathrm{Obj}(\Sigma_{\tilde{\Omega}})^2$ mittels $\varphi\mapsto\{\varphi\}$ die Morphismenmenge $(\Sigma_{\tilde{\Omega}})(v,w)$ in $(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})(v,w)$ ein. $(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})$ können wir als eine semiadditive Kategorie (s. Schubert (1970),I,S.4) mit den gleichen Objekten wie $(\Sigma_{\tilde{\Omega}})$ betrachten, die für jedes Paar von Objekten (v,w) die Menge (18) als die Menge der Morphismen von v nach w hat, mit der Komposition

$$MN := \{\varphi\psi;\varphi\in M,\psi\in N\}\in(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})(v,z) \quad (M\in(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})(v,w),\ N\in(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})(w,z),$$

$$v,w,z\in\mathrm{Obj}(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})),$$

mit der Addition

$$M+M' := M \cup M' \in (\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}})(v,w) \quad (M, M \in (\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}})(v,w),\ v,w \in \mathrm{Obj}(\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}})),$$

und mit der leeren Menge $\emptyset \in (\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}})(v,w)$ als dem Nullelement der Addition ($(v,w) \in \mathrm{Obj}(\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}})^2$) (genaugenommen müssen wir die leere Menge $\emptyset \in (\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}})(v,w)$ mit (v,w) indizieren, damit die Morphismenmengen von $(\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}})$ paarweise disjunkt sind).

2.4. Das freie äußere Verhalten von Berechnungsgraphen und Schemata

Sei B ein Berechnungsgraph über Ω. Wir interessieren uns für die Marken von Wegen in B, die von einem Knoten zu den Nullknoten und Ausgängen von B führen.

Zunächst nehmen wir an, daß der Berechnungsgraph B vom Typ $(\sigma,\tau) \in S^{+2}$, $\sigma = s_1 \ldots s_n$, $\tau = t_1 \ldots t_p$ ist. Sei k ein Knoten von B mit einer Marke vom Eingangstyp $s \in S$. Man sieht leicht, daß jeder Weg in B von k zu einem Nullknoten von B einen Morphismus $s \to 0$ aus $(\Sigma_{\tilde{\pi}})$ als Marke trägt, und daß die Marke jedes Weges von k zum j-ten Ausgang von B ein Morphismus $s \to t_j$ aus $(\Sigma_{\tilde{\pi}})$ ist ($j \in [p]$). Wir ordnen die Marken aller Wege in B, die von k zu den Nullknoten und Ausgängen führen, zu einem Paar

$$(20)\quad (A_0, A_1 A_2 \ldots A_p),$$

wobei $A_0 \in (\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}})(s,0)$ die Menge der Marken aller Wege von k zu den Nullknoten in B und $A_j \in (\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}})(s,t_j)$ die Menge der Marken aller Wege in B von k zum j-ten Ausgang von B sind ($j \in [p]$). Das Paar (20) nennen wir das Verhalten des Knoten k in B. Als das äußere Verhalten des Berechnungsgraphen B bezeichnen wir das Paar von Matrizen

$$(21)\quad \left(\begin{vmatrix} A_{10} \\ A_{20} \\ \vdots \\ A_{n0} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_{11}A_{12} \ldots A_{1p} \\ A_{21}A_{22} \\ \\ \\ A_{n1} \qquad A_{np} \end{vmatrix} \right),$$

wo $(A_{i0}, A_{i1}A_{i2} \ldots A_{ip})$ das Verhalten des i-ten Eingangs von B ist ($i \in [n]$). Für die $(1 \times n)$-Matrix $\langle\!\langle A_{i0} \rangle\!\rangle$ wollen wir das Paar $(\sigma,0)$, $\sigma = s_1 \ldots s_n$ als ihren Typ betrachten, denn es gilt $A_{i0} \in (\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}})(s_i,0)$ ($i \in [n]$). Eine ähnliche Rolle spielt das Paar (σ,τ), $\tau = t_1 \ldots t_p$ für die $(n \times p)$-Matrix $\langle\!\langle A_{ij} \rangle\!\rangle$, für die $A_{ij} \in (\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}})(s_i,t_j)$ gilt ($i \in [n]$, $j \in [p]$).

Wir geben derartigen Matrizen einen Namen:

Sind $(\sigma,\tau)\in S^{+2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$, und gilt $A_{ij}\in(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}})(s_i,t_j)$ $(i\in[n], j\in[p])$, so heißt das Tripel

(22) $(\langle\!\langle A_{ij}\rangle\!\rangle,\sigma,\tau)$

eine Matrix über $(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}})$ vom Typ (σ,τ). Ist $\sigma=s_1\ldots s_2\in S$ und gilt $A_i\in(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}})(s_i,0)$ $(i\in[n])$, so heißt das Tripel

(23) $(\langle\!\langle A_i\rangle\!\rangle,\sigma,0)$

eine Matrix über $(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}})$ vom Typ $(\sigma,0)$. Sind sämtliche Matrixelemente von $\langle\!\langle A_{ij}\rangle\!\rangle$ bzw. $\langle\!\langle A_i\rangle\!\rangle$ gleich der leeren Menge, so nennen wir (22) bzw. (23) die Nullmatrix über $(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}})$ vom Typ (σ,τ) bzw. $(\sigma,0)$; Bezeichnung $(\emptyset,\sigma,\tau)$ bzw. $(\emptyset,\sigma,0)$.

Um auch die Fälle n=0 oder p=0 zu erfassen, nennen wir für $n,p\in\mathbb{N}_0$, n=0 oder p=0 und für $\sigma\in S^n$, $\tau\in S^p$ das Tripel

$$(\emptyset:[n]\to[p],\sigma,\tau)$$

mit der leeren partiellen Abbildung $\emptyset:[n]\to[p]$ ebenfalls eine Matrix über $(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}})$ vom Typ (σ,τ); sie heißt die $(n\times p)$-Nullmatrix über $(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}})$ vom Typ (σ,τ). Analog dazu heißt für n=0 das Tripel

(24) $(\emptyset:[0]\to[1],\varepsilon,0)$

die (0×1)-Nullmatrix über $(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}})$ vom Typ $(\varepsilon,0)$.

Es ist nur eine Konvention, daß wir die Matrizen über $(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}})$ als Tripel definieren, in denen die Typen der Matrizen explizit auftreten. Dadurch ist z.B. auch für eine Nullmatrix über $(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}})$ ihr Typ eindeutig definiert. Wir wollen jedoch künftig beim Umgang mit Matrizen über $(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}})$ die übliche Terminologie benutzen: Sind $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, so sprechen wir von $a=(\langle\!\langle A_{ij}\rangle\!\rangle,\sigma,\tau)$ in (22) als von einer $(n\times p)$-Matrix; unter der k-ten Zeile der Matrix a, $k\in[n]$, wird die $(1\times p)$-Matrix $(\langle\!\langle A_{kj}\rangle\!\rangle,s_k,\tau)$ über $(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}})$ verstanden, mit a_{ij}, $i\in[n], j\in[p]$, wird die (1×1)-Matrix (A_{ij},s_i,t_j) über $(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}})$ bezeichnet usw.

Wir bezeichnen für $\sigma,\tau\in S^*$ mit $\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}}\rangle\!\rangle(\sigma,\tau)$ bzw. $\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}}\rangle\!\rangle(\sigma,0)$ die Menge aller Matrizen über $(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}})$ vom Typ (σ,τ) bzw. $(\sigma,0)$ und setzen

(25) $\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}}\rangle\!\rangle:=(\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}}\rangle\!\rangle(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$.

Für den obigen Berechnungsgraphen B über Ω vom Typ (σ,τ) können wir jetzt anstatt des Matrizenpaares $(\langle\!\langle A_{i0}\rangle\!\rangle,\langle\!\langle A_{ij}\rangle\!\rangle)$ in (21) etwas genauer das Paar

(26) $v_f(B):=((\langle\!\langle A_{i0}\rangle\!\rangle,\sigma,0);(\langle\!\langle A_{ij}\rangle\!\rangle,\sigma,\tau))\in\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}}\rangle\!\rangle(\sigma,0)\times\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\widetilde{\pi}}}\rangle\!\rangle(\sigma,\tau)$

zur Charakterisierung der Marken aller Wege von Eingängen zu

Nullknoten und Ausgängen in B verwenden. Das Matrizenpaar

(27) $v_f(B)=(v_f^{(1)}(B),v_f^{(2)}(B))$

in (26) nennen wir das freie äußere Verhalten des Berechnungsgraphen B.

Sei wieder B ein Berechnungsgraph über Ω vom Typ (σ,τ), $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$, wobei jetzt allgemein $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$ sei. Im Falle n=0 d.h. $\sigma=\varepsilon$ gibt es keinen Weg von einem Eingang zu einem Ausgang in B. Wir definieren

(28) $v_f(B):=((\emptyset:[0]\to[1],\varepsilon,0);(\emptyset:[0]\to[p],\varepsilon,\tau))\in(\!(\widehat{\Sigma_\Omega})\!)(\varepsilon,0)\times$

$\times(\!(\widehat{\Sigma_\Omega})\!)(\varepsilon,\tau)$

als das freie äußere Verhalten von B. Ist p=0 d.h. $\tau=\varepsilon$, so gibt es keinen Weg von einem Eingang zu einem Ausgang in B. Im Falle $n\geq 1$ seien $A_{i0}\in(\widehat{\Sigma_\Omega})(s_i,0)$ die Menge der Marken aller Wege von i-tem Eingang zu den Nullknoten in B ($i\in[n]$) und $(\!(A_{i0})\!),\sigma,0)$ die entsprechende $(n\times 1)$-Matrix über $(\widehat{\Sigma_\Omega})$. Wir definieren

(29) $v_f(B):=((\!(A_{i0})\!),\sigma,0);(\emptyset:[n]\to[0],\sigma,\varepsilon))\in(\!(\widehat{\Sigma_\Omega})\!)(\sigma,0)\times(\!(\widehat{\Sigma_\Omega})\!)(\sigma,\varepsilon)$

als das freie äußere Verhalten von B. Im Falle n=p=0 sei

(30) $v_f(B):=((\emptyset:[0]\to[1],\varepsilon,0);(\emptyset:[0]\to[0],\varepsilon,\varepsilon))\in(\!(\widehat{\Sigma_\Omega})\!)(\varepsilon,0)\times$

$\times(\!(\widehat{\Sigma_\Omega})\!)(\varepsilon,\varepsilon)$

das freie äußere Verhalten von B.

Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir für $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$ $[\widehat{\Sigma_\Omega}](\sigma,\tau):=(\!(\widehat{\Sigma_\Omega})\!)(\sigma,0)\times(\!(\widehat{\Sigma_\Omega})\!)(\sigma,\tau)$ und setzen

(31) $[\widehat{\Sigma_\Omega}]:=([\widehat{\Sigma_\Omega}](\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$.

Wir merken an, daß die erste Komponente $v_f^{(1)}(B)$ des freien äußeren Verhaltens eines totalen Berechnungsgraphen B eine Nullmatrix ist, da B keine Nullknoten besitzt.

Sind B,B' zwei isomorphe Berechnungsgraphen über Ω, so ist offensichtlich $v_f(B)=v_f(B')$. Wir können daher definieren:

Definition.
Das freie äußere Verhalten $v_f(b)$ eines Schemas b über Ω vom Typ $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$ ist

(32) $v_f(b):=v_f(B)\in[\widehat{\Sigma_\Omega}](\sigma,\tau)$,

wobei B ein Berechnungsgraph über Ω mit $\overline{B}=b$ ist.

§3. Algebren von Schemata

Seien wie früher $\Omega = \bigcup_{s\in S,\tau\in S^*} \Omega^s_\tau$ eine Zeichenmenge und $\widetilde{\Omega} = \Omega_{S\cup S\times\{0\}}$ die durch Adjunktion von $S\cup S\times\{0\}$ zu Ω entstandene Zeichenmenge (s.(1),S.1 ,(3),S.2). Wir halten in diesem Paragraphen Ω fest und untersuchen einige spezielle Schemata über Ω und ihr freies äußeres Verhalten. Dann definieren wir gewisse Verknüpfungen von Schemata und untersuchen, wie sich diese Operationen über Schemata auf ihr freies äußeres Verhalten auswirken.

Alle Berechnungsgraphen und Schemata in diesem Paragraphen sind über Ω, auch wenn es nicht ausdrücklich erwähnt ist.

3.1. Spezielle Schemata

Sei $p\in\mathbb{N}$ und sei für jedes $i\in[p]$ $i:[1]\to[p]$ die Abbildung mit dem Wert i. Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir in diesem Kontext

$$i_p := i:[1]\to[p] \quad (i\in[p]).$$

Für jedes $\tau = t_1\ldots t_p\in S^+$ sei

(1) $B_{i_p,t_i,\tau}$ $(i\in[p])$

der Berechnungsgraph (K,e,a,γ) über Ω vom Typ (t_i,τ) definiert durch $K:=[p]$, $e:=i:[1]\to[p]$, $a:=id_{[p]}:[p]\to[p]$, $\gamma(j):=(t_j)$ $(j\in[p])$. Er ist schleifenfrei und total, sein Grad ist Null. Das freie äußere Verhalten von $B_{i_p,t_i,\tau}$ ist das Matrizenpaar

(2) $((\emptyset,t_i,0);(A_{i_p},t_i,\tau))\in[\widehat{\Sigma_{\widetilde{\Omega}}}](t_i,\tau)$,

dessen zweite Komponente die $(1\times p)$-Matrix (A_{i_p},t_i,τ) ist, $A_{i_p} = (\alpha_j)$, mit $\alpha_i = t_i$, $\alpha_j = \emptyset$ $(j\neq i,\ j\in[p])$.

Ist $\tau = t_1\ldots t_p\in S$ mit $t_i = t_j$ für zwei Indizes $i,j\in[p]$, $i\neq j$, so sind die Schemata $\overline{\overline{B_{i_p,t_i,\tau}}}$, $\overline{\overline{B_{j_p,t_i,\tau}}} \in S^{sf,t}_\Omega(t_i,\tau)$, die Matrizen $(A_{i_p},t_i,\tau),(A_{j_p},t_i,\tau)\in(\!(\widehat{\Sigma_{\widetilde{\Omega}}})\!)(t_i,\tau)$ und die Matrizenpaare $((\emptyset,t_i,0);(A_{i_p},t_i,\tau)),((\emptyset,t_i,0);(A_{j_p},t_i,\tau))\in[\widehat{\Sigma_{\widetilde{\Omega}}}](t_i,\tau)$ jeweils verschieden. Wir bezeichnen für jedes $(s,\tau)\in S\times S^+$, $\tau = t_1\ldots t_p$ mit $I_S(s,\tau)$ die Menge aller Tripel $(f:[1]\to[p],s,\tau)$ mit $s=t_i$ und $f=i_p$ für ein $i\in[p]$, und setzen

(3) $I_S := (I_S(s,\tau))_{(s,\tau)\in S\times S^+}$.

Es ist zweckmäßig, I_S mittels $(i_p,s,\tau)\mapsto \overline{B_{i_p,s,\tau}}$ in $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,t}$ (und damit in $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega_\circ t}$, $\mathcal{Y}_\Omega^{sf}$ und $\mathcal{Y}_\Omega$), mittels $(i_p,s,\tau)\mapsto(A_{i_p},s,\tau)$ in $(\!(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})\!)$ und mittels $(i_p,s,\tau)\mapsto((\emptyset,s,0);(A_{i_p},s,\tau))$ in $[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}]$ komponentenweise einzubetten.

Wir bezeichnen mit ν_f und $\nu_f^{(2)}$ die komponentenweisen Abbildungen

$$\nu_f: \mathcal{Y}_\Omega \longrightarrow [\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}]: b\mapsto \nu_f(b)$$

$$\nu_f^{(2)}: \mathcal{Y}_\Omega \longrightarrow (\!(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})\!): b\mapsto \nu_f^{(2)}(b)$$

und ebenfalls ihre komponentenweisen Einschränkungen auf $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,t}$, $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega_\circ t}$ und $\mathcal{Y}_\Omega^{sf}$.

3.1. Lemma.
Die komponentenweisen Abbildungen $\nu_f: \mathcal{Y}_\Omega^{sf,t}\longrightarrow[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}]$, $\nu_f^{(2)}: \mathcal{Y}_\Omega^{sf,t}\longrightarrow(\!(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})\!)$ (und damit auch ihre Erweiterungen auf $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega_\circ t}$, $\mathcal{Y}_\Omega^{sf}$ bzw. $\mathcal{Y}_\Omega$) halten I_S elementenweise fest.

Für jedes $\omega\in\Omega_\tau^s$, $s\in S$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, bezeichnen wir mit

(4) B_ω

den Berechnungsgraphen (K,e,a,γ) über Ω vom Typ (s,τ) definiert durch $K:=[p+1]$, $e_1:=p+1$, $a_j:=j$ $(j\in[p])$, $\gamma(j):=(t_j)$ $(j\in[p])$, $\gamma(p+1):=(\omega,1,2,\ldots,p)$. Er ist schleifenfrei, für $\omega\in\Omega_\circ$ $\Omega_\circ$-total aber nicht total, für $\omega\in\Omega\setminus\Omega_\circ$ total, und sein Grad ist 1.

Ist $\omega\in\Omega_\tau^s$, $s\in S$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^+$, so ist das freie äußere Verhalten von B_ω das Matrizenpaar

$$((\emptyset,s,0);(A_\omega,s,\tau))\in[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}](s,\tau)$$

mit der $(1\times p)$-Matrix

(5) $(A_\omega,s,\tau)\in(\!(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})\!)(s,\tau)$, $A_\omega=((\omega,1),(\omega,2),\ldots,(\omega,p))$

als zweite Komponente.

Sind $\omega,\omega'\in\Omega_\tau^s$, $(s,\tau)\in S\times S^+$, zwei verschiedene Zeichen, so sind auch die Schemata $\overline{B_\omega},\overline{B_{\omega'}}\in S_\Omega^{sf,t}(s,\tau)$ die Matrizen $(A_\omega,s,\tau),(A_{\omega'},s,\tau)\in(\!(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})\!)(s,\tau)$ und die Matrizenpaare $((\emptyset,s,0);(A_\omega,s,\tau))$, $((\emptyset,s,0);(A_{\omega'},s,\tau))\in[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}](s,\tau)$ jeweils verschieden.

Am Anfang haben wir bei der Definition einer Zeichenmenge $\Omega = \bigcup_{(s,\tau)\in S\times S^*} \Omega^S_\tau$ gefordert, daß die Mengen Ω^S_τ paarweise disjunkt sind. Im Folgenden werden wir öfters die Familie $(\Omega^S_\tau)_{(s,\tau)\in S\times S^*}$ bzw. $(\Omega^S_\tau)_{(s,\tau)\in S\times S^+}$ statt der Mengenvereinigung Ω bzw. $\Omega\setminus\Omega_\circ$ betrachten. Da aber zwischen den Elementen der Familien und der Mengenvereinigungen jeweils eine eineindeutige Korrespondenz besteht, wollen wir künftig auch die Familie $(\Omega^S_\tau)_{(s,\tau)\in S\times S^*}$ mit Ω und die Familie $(\Omega^S_\tau)_{(s,\tau)\in S\times S^+}$ mit $\Omega\setminus\Omega_\circ$ bezeichnen. In diesem Sinne wird dann z.B. von einer komponentenweisen Einbettung von $\Omega\setminus\Omega_\circ$ in die Familie $\mathcal{Y}^{sf,t}_{\Omega|S\times S^+} = (S^{sf,t}_\Omega(s,\tau))_{(s,\tau)\in S\times S^+}$ gesprochen u.ä.

Wir betten $\Omega\setminus\Omega_\circ$ mittels

(6) $\omega \longmapsto \overline{B_\omega}$

in $\mathcal{Y}^{sf,t}_{\Omega|S\times S^+}$ (und damit in $\mathcal{Y}^{sf,\Omega_\circ t}_{\Omega|S\times S^+}$, $\mathcal{Y}^{sf}_{\Omega|S\times S^+}$ und $\mathcal{Y}_{\Omega|S\times S^+}$), mittels $\omega\longmapsto(A_\omega,s,\tau)$ in $(\!(\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}})\!)$ und mittels $\omega\longmapsto((\emptyset,s,0);(A_\omega,s,\tau))$ in $[\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}}]$ komponentenweise ein.

3.2. Lemma.
Die komponentenweisen Abbildungen $v_f : \mathcal{Y}^{sf,t}_\Omega \longrightarrow [\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}}]$, $v^{(2)}_f : \mathcal{Y}^{sf,t}_\Omega \longrightarrow (\!(\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}})\!)$ (und damit auch ihre Erweiterungen auf $\mathcal{Y}^{sf,\Omega_\circ t}_\Omega$, $\mathcal{Y}^{sf}_\Omega$ bzw. $\mathcal{Y}_\Omega$) halten $\Omega\setminus\Omega_\circ$ elementenweise fest.

Ist $\omega\in\Omega^S_\varepsilon$, $s\in S$, so ist der Berechnungsgraph B_ω schleifenfrei und $\Omega_\circ$-total, aber nicht total. Sein freies äußeres Verhalten ist das Matrizenpaar

(7) $((A_\omega,s,0);(\emptyset:[1]\to[0],s,\varepsilon))\in[\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}}](s,\varepsilon)$

mit der (1×1)-Matrix $(A_\omega,s,0)$, $A_\omega = (\!(\omega)\!)$, als erste Komponente. Für zwei verschidene Zeichen $\omega,\omega'\in\Omega^S_\varepsilon$, $s\in S$, sind auch die Schemata $\overline{B_\omega},\overline{B_{\omega'}}\in S^{sf,\Omega_\circ t}(s,\varepsilon)$ und die Matrizenpaare $((A_\omega,s,0);(\emptyset:[1]\to[0],s,\varepsilon))$, $((A_{\omega'},s,0);(\emptyset:[1]\to[0],s,\varepsilon))\in[\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}}](s,\varepsilon)$ jeweils verschieden; für die zweiten Komponenten der freien äußeren Verhalten gilt dagegen $v^{(2)}_f(\overline{B_\omega}) = v^{(2)}_f(\overline{B_{\omega'}})$ in $(\!(\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}})\!)(s,\varepsilon)$.

Wir betten $\Omega_\circ$ mittels

(8) $\omega\longmapsto\overline{B_\omega}$

in $\mathcal{Y}^{sf,\Omega_\circ t}_{\Omega|S\times\{\varepsilon\}}$ (und damit in $\mathcal{Y}^{sf}_{\Omega|S\times\{\varepsilon\}}$ und $\mathcal{Y}_{\Omega|S\times\{\varepsilon\}}$) und mittels $\omega\longmapsto((A_\omega,s,0);(\emptyset:[1]\to[0],s,\varepsilon))$ in $[\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}}]_{|S\times\{\varepsilon\}}$ komponentenweise ein.

3.3. Lemma.
Die komponentenweise Abbildung $\nu_f: \mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega_\omega t} \to [\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}}]$ (und damit auch ihre Erweiterung auf $\mathcal{Y}_\Omega^{sf}$ bzw. $\mathcal{Y}_\Omega$) hält Ω_ω elementenweise fest. Unter der komponentenweisen Abbildung $\nu_f^{(2)}: \mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega_\omega t} \to (\!(\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}})\!)$ (und damit auch unter ihrer Erweiterung auf $\mathcal{Y}_\Omega^{sf}$ bzw. $\mathcal{Y}_\Omega$) gilt $\nu_f^{(2)}(\Omega_\varepsilon^s) = (\emptyset:[1] \to [0], s, \varepsilon)$ $(s \in S)$.

Die Knoten von Berechnungsgraphen über Ω sind mit Elementen aus $\widetilde{\Omega} = \Omega_{S \cup S \times \{0\}}$ (s.(3),S.2) markiert. Wir bezeichnen für jedes $s \in S$ mit

(9) $B_{s,0}$

den Berechnungsgraphen (K,e,a,γ) über Ω vom Typ (s,ε) definiert durch $K := [1]$, $e := id_{[1]}: [1] \to [1]$, $a := \emptyset: [0] \to [1]$, $\gamma(1) := ((s,0))$. Er ist schleifenfrei aber nicht Ω_ω-total. Das freie äußere Verhalten von $B_{s,0}$ ist das Matrizenpaar

(10) $((A_{s,0}, s, 0); (\emptyset: [1] \to [0], s, \varepsilon)) \in [\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}}](s,\varepsilon)$

mit der (1×1)-Matrix $A_{s,0} = (\!((s,0))\!)$.

Wir wollen $S \times \{0\}$ (betrachtet als die Familie $((s,0))_{s \in S}$, vgl. S.13 oben) mittels $(s,0) \mapsto \overline{B_{s,0}}$ in $\mathcal{Y}_\Omega^{sf}{}_{|S \times \{\varepsilon\}}$ (und damit in $\mathcal{Y}_\Omega{}_{|S \times \{\varepsilon\}}$), mittels $(s,0) \mapsto (\emptyset: [1] \to [0], s, \varepsilon)$ in $(\!(\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}})\!)_{|S \times \{\varepsilon\}}$ und mittels $(s,0) \mapsto ((A_{s,0}, s, 0); (\emptyset: [1] \to [0], s, \varepsilon))$ in $[\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}}]_{|S \times \{\varepsilon\}}$ komponentenweise einbetten.

3.4. Lemma.
Die komponentenweisen Abbildungen $\nu_f: \mathcal{Y}_\Omega^{sf} \to [\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}}]$,

(11) $\nu_f^{(2)}: \mathcal{Y}_\Omega^{sf} \to (\!(\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}})\!)$

(und damit auch ihre Erweiterungen auf $\mathcal{Y}_\Omega$) halten $S \times \{0\}$ elmentenweise fest. Unter der komponentenweisen Abbildung (11) (und damit auch unter seiner Erweiterung auf) gilt $\nu_f^{(2)}(\Omega_\varepsilon^s) = (s,0)$ $(s \in S)$ in $(\!(\widehat{\Sigma}_{\widetilde{\Omega}})\!)$.

Sei für jede partielle Abbildung $f: [n] \to [p]$, $n,p \geq 0$,

(12) $\hat{f} \subseteq S^n \times S^p$

die Relation definiert durch

(13) $(\sigma,\tau) \in \hat{f} \quad :\Leftrightarrow \quad \sigma = s_1 \ldots s_n \in S^n$, $\tau = t_1 \ldots t_p \in S^p$ und $(f(i) = j,\ i \in [n],\ j \in [p] \Rightarrow s_i = t_{f(i)})$.

Wir bezeichnen für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$ mit

(14) $\mathfrak{S}_{S,P}(\sigma,\tau)$ bzw. $\mathfrak{S}_{S,F}(\sigma,\tau)$

die Menge aller Tripel (f,σ,τ) mit einer partiellen bzw. totalen Abbildung $f:[n]\to[p]$ und mit $(\sigma,\tau)\in\hat{f}$, und setzen

(15) $\mathfrak{S}_{S,P}:=(\mathfrak{S}_{S,P}(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$, $\mathfrak{S}_{S,F}:=(\mathfrak{S}_{S,F}(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$

(der Index P bzw. F steht für „partielle Funktionen" bzw. „Funktionen"). Es gilt offensichtlich $\mathfrak{S}_{S,F}\subseteq\mathfrak{S}_{S,P}$, komponentenweise, und $I_S=\mathfrak{S}_{S,F|S\times S^*}$, wobei I_S die in (3),S.12 definierte Familie ist.

Sei jetzt (f,σ,τ) ein Element aus $\mathfrak{S}_{S,P}(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$. f ist also eine partielle Abbildung $f:[n]\to[p]$. Seien $0<i_1<i_2<\ldots<i_r\leq n$ alle Elemente aus [n], die nicht im Definitionsbereich D_f von f liegen. Wir bezeichnen mit

(16) $B_{f,\sigma,\tau}$

den Berechnungsgraphen (K,e,a,γ) über Ω vom Typ (σ,τ) definiert durch $K:=[p+r]$, $e_j:=f(j)$ $(j\in D_f)$, $e_{i_k}:=p+k$ $(k\in[r])$, $a:=id_{[p]}$, $\gamma(j):=(t_j)$ $(j\in[p])$, $\gamma(j+k):=((s_{i_k},0))$ $(k\in[r])$. Ist die Abbildung f total, so ist $B_{f,\sigma,\tau}$ schleifenfrei und total. Für nichttotale Abbildung f ist $B_{f,\sigma,\tau}$ schleifenfrei aber nicht Ω_σ-total. Der Grad des Berechnungsgraphen $B_{f,\sigma,\tau}$ ist r. Das freie äußere Verhalten von $B_{f,\sigma,\tau}$ ist das Matrizenpaar

(17) $((A_{\overline{D_f}},\sigma,0);(A_f,\sigma,\tau))\in[\hat{\Sigma}_{\tilde{\Omega}}](\sigma,\tau)$

mit der $(n\times1)$-Matrix $A_{\overline{D_f}}=(\!(A_i)\!)$ definiert durch

(18) $A_{i_k}:=(s_{i_k},0)$ $(k\in[r])$

$A_i:=\emptyset$ sonst für $i\in[n]$

(der Index $\overline{D_f}$ bei $A_{\overline{D_f}}$ soll an das „Komplement" von D_f in $\sigma=s_1\ldots s_n$ erinnern), und mit der $(n\times p)$-Matrix A_f definiert durch

(19) $A_{f,ij}:=t_j$ falls $f(i)=j$

$A_{f,ij}:=\emptyset$ sonst $(i\in[n],\ j\in[p])$.

Sind $\sigma\in S^n$, $\tau\in S^p$, $n,p\geq0$, und sind $f,f':[n]\to[p]$ zwei verschiedene partielle Abbildungen mit $(\sigma,\tau)\in\hat{f}$, $(\sigma,\tau)\in\hat{f'}$, so sind die Schemata $\overline{B_{f,\sigma,\tau}}$, $\overline{B_{f',\sigma,\tau}}\in S^{sf}(\sigma,\tau)$, die Matrizen $(A_f,\sigma,\tau),(A_{f'},\sigma,\tau)\in(\!(\hat{\Sigma}_{\tilde{\Omega}})\!)(\sigma,\tau)$

und die Matrizenpaare $((A_{\overline{D_f}},\sigma,0);(A_f,\sigma,\tau)),((A_{\overline{D_{f'}}},\sigma,0);(A_{f'},\sigma,\tau))\in [\widehat{\Sigma_{\tilde{\Lambda}}}](\sigma,\tau)$ jeweils verschieden. Wir betten $\mathfrak{S}_{S,F}$ bzw. $\mathfrak{S}_{S,P}$ mittels

(20) $(f,\sigma,\tau)\mapsto \overline{B_{f,\sigma,\tau}}$

in $\mathfrak{H}_\Lambda^{sf,t}$ (und damit in $\mathfrak{H}_\Lambda^{sf,\ell\circ t}$, $\mathfrak{H}_\Lambda^{sf}$ und $\mathfrak{H}_\Lambda$) bzw. in $\mathfrak{H}_\Lambda^{sf}$ (und damit in $\mathfrak{H}_\Lambda$), mittels $(f,\sigma,\tau)\mapsto(A_f,\sigma,\tau)$ in $\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\tilde{\Lambda}}}\rangle\!\rangle$ und mittels $(f,\sigma,\tau)\mapsto((A_{\overline{D_f}},\sigma,0);(A_f,\sigma,\tau))$ in $[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Lambda}}}]$ komponentenweise ein.

Wir merken noch an, daß für jedes $s\in S$ die Berechnungsgraphen $B_{s,0}$ (s.(9),S.14) und $B_{\emptyset:[1]\to[0],s,\tau}$ (s.(16),S.15) gleich sind.

3.5. Lemma.
Die komponentenweisen Abbildungen $\nu_f:\mathfrak{H}_\Lambda^{sf,t}\to[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Lambda}}}]$, $\nu_f^{(2)}:\mathfrak{H}_\Lambda^{sf,t}\to\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\tilde{\Lambda}}}\rangle\!\rangle$ (und damit auch ihre Erweiterungen auf $\mathfrak{H}_\Lambda^{sf,\ell\circ t}$, $\mathfrak{H}_\Lambda^{sf}$ bzw. $\mathfrak{H}_\Lambda$) halten $\mathfrak{S}_{S,F}$ elementenweise fest. Die komponentenweisen Abbildungen $\nu_f:\mathfrak{H}_\Lambda^{sf}\to[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Lambda}}}]$, $\nu_f^{(2)}:\mathfrak{H}_\Lambda^{sf}\to\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\tilde{\Lambda}}}\rangle\!\rangle$ (und damit auch ihre Erweiterungen auf $\mathfrak{H}_\Lambda$) halten $\mathfrak{S}_{S,P}$ elementenweise fest. Es gilt

(21) $\mathfrak{S}_{S,P|S\times\{\varepsilon\}} = S\times\{0\}$ in $\mathfrak{H}_\Lambda^{sf}$ (und $\mathfrak{H}_\Lambda$), $\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\tilde{\Lambda}}}\rangle\!\rangle$ und $[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Lambda}}}]$.

3.2. Produkt

Seien $\varsigma,\sigma,\tau\in S^*$, $\varsigma=r_1\dots r_m$, $\sigma=s_1\dots s_n$, $\tau=t_1\dots t_p$, seien $b\in S_\Lambda(\varsigma,\sigma)$, $c\in S_\Lambda(\sigma,\tau)$, und seien $B=(K_B,e_B,a_B,\gamma_B)$ ein Repräsentant von b und $C=(K_C,e_C,a_C,\gamma_C)$ ein Repräsentant von c mit $K_B\cap K_C=\emptyset$.

Wir definieren das Produkt BC als einen Berechnungsgraphen vom Typ (ς,τ), indem wir für jedes $i\in[n]$ den i-ten Ausgang von B (der mit s_i markiert ist und keine direkte Nachfolger hat) mit dem i-ten Eingang von C (der mit einem $\omega\in\tilde{\Lambda}^{s_i}_{u_1\dots u_q}$, $u_1\dots u_q\in S^*$, markiert ist und gewisse $k_1,\dots,k_q\in K_C$ als direkte Nachfolger hat) identifizieren, wobei wir dem auf diese Weise entstandenen Knoten die Marke von $e_{C,i}$ (das obige $\omega\in\tilde{\Lambda}^{s_i}_{u_1\dots u_q}$) als seine Marke und die direkten Nachfolger von $e_{C,i}$ in C (das obige q-tupel $(k_1,\dots,k_q)$) als seine direkten Nachfolger in BC zuordnen; die übrigen Knoten von B und C sowie ihre Marken und direkten Nachfolger lassen wir unverändert. Die Eingänge von B werden zu Eingängen von BC, die Ausgänge von C werden zu Ausgängen von BC.

Wir müssen noch eine Vorkehrung für den Fall treffen, das zwei

Eingänge $e_{C,i}=e_{C,j}$, $i\neq j$, von C zusammenfallen. Wir wollen dann mit innen auch die beiden Ausgänge $a_{B,i}, a_{B,j}$ von B identifizieren. Dazu definieren wir zuerst eine Abbildung

(22) $K_B \cup K_C \to \mathcal{P}(K_B \cup K_C): k \mapsto \overline{k}$

durch $\overline{e_{C,i}} := \{e_{C,i}\} \cup \{a_{B,j}; e_{C,i}=e_{C,j}\}$ $(i\in[n])$, $\overline{a_{B,i}} := \overline{e_{C,i}}$ $(i\in[m])$, $\overline{k} := \{k\}$ sonst. Es gilt also für $i,j\in[n]$ $\overline{e_{C,i}}=\overline{e_{C,j}}$ oder $\overline{e_{C,i}}\cap\overline{e_{C,j}}=\emptyset$. Für $i,j\in[p]$, $i\neq j$, gilt $\overline{a_{C,i}}\neq\overline{a_{C,j}}$.

Das Produkt BC der Berechnungsgraphen B und C ist der Berechnungsgraph

(23) (K,e,a,γ), definiert durch

$K := \{\overline{k}; k\in K_B \cup K_C\}$

$e_i := \overline{e_{B,i}}$ $(i\in[m])$

$a_j := \overline{a_{C,j}}$ $(j\in[p])$

$\gamma(\overline{a_{B,i}}) := (\omega, \overline{k_1}, \ldots, \overline{k_q})$ mit $(\omega, k_1, \ldots, k_q) = \gamma_C(e_{C,i})$ $(i\in[n])$

$\gamma(\overline{k}) := (\omega, \overline{k_1}, \ldots, \overline{k_q})$ sonst für $k\in K_B \cup K_C$, mit $(\omega, k_1, \ldots, k_q) = \gamma_B(k)$ oder $(\omega, k_1, \ldots, k_q) = \gamma_C(k)$.

Nach der Konstruktion ist klar, daß $BC=(K,e,a,\gamma)$ wohl definiert ist, und daß es ein Berechnungsgraph über Ω vom Typ (ς,τ) ist mit $\mathrm{Grad}(BC) = \mathrm{Grad}(B)+\mathrm{Grad}(C)$. Ist $\alpha=(k_1,(\omega_1,i_1),k_2,(\omega_2,i_2),\ldots,k_r,(\omega_r,i_r),k_{r+1})$ bzw. $\alpha=(k_1,(\omega_1,i_1),k_2,(\omega_2,i_2),\ldots,k_r,(\omega_r,i_r),k_{r+1},\omega_{r+1})$ ein Weg von k_1 nach k_{r+1} in B oder C (s.(12),S.25 bzw.(14), S.25), so ist offensichtlich $\overline{\alpha} := (\overline{k_1},(\omega_1,i_1),\overline{k_2},(\omega_2,i_2),\ldots,\overline{k_r},(\omega_r,i_r),\overline{k_{r+1}})$ bzw. $\overline{\alpha} := (\overline{k_1},(\omega_1,i_1),\overline{k_2},(\omega_2,i_2),\ldots,\overline{k_r},(\omega_r,i_r),\overline{k_{r+1}},\omega_{r+1})$ ein Weg von $\overline{k_1}$ nach $\overline{k_{r+1}}$ in BC. Für die Marken gilt in beiden Fällen $m(\overline{\alpha})=m(\alpha)$.

Seien B' ein Berechnungsgraph vom Typ (ς,σ) isomorph zu B und C' ein Berechnungsgraph vom Typ (σ,τ) isomorph zu C mit $K_B \cap K_C = \emptyset$. Dann ist offensichtlich B'C' isomorph zu BC. Wir können daher definieren:

Das Produkt bc der Schemata b und c ist das Schema $bc := \overline{BC}$.

Wir bezeichnen für jedes $(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}$ mit $p_{\varsigma,\sigma,\tau}$ die (heterogene Operation

(24) $p_{\varsigma,\sigma,\tau}: S_\Omega(\varsigma,\sigma) \times S_\Omega(\sigma,\tau) \to S_\Omega(\varsigma,\tau): (b,c) \mapsto bc.$

Die Familie $\mathfrak{p} := (p_{\varsigma,\sigma,\tau})_{(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}}$ nennen wir das Produkt in $\mathcal{Y}_\Omega$. Man sieht leicht, daß für schleifenfreie , schleifenfreie Ω_σ-totale bzw. schleifenfreie totale Berechnungsgraphen B und C ihr Produkt BC ebenfalls schleifenfrei, schleifenfrei $\Omega_\sigma$total bzw. schleifenfrei total ist. Die komponentenweise Einschränkung von $\mathfrak{p}$ auf $\mathcal{Y}_\Omega^{sf}$, $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega_\sigma t}$ bzw. $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,t}$ nennen wir das Produkt in $\mathcal{Y}^{sf}$, $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega_\sigma t}$ bzw. $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,t}$.

Wir untersuchen jetzt, wie sich das Produkt auf das freie äußere Verhalten von Schemata auswirkt.

Das Produkt in $(\!(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})\!)$ ist definiert für $(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}$ und für $(A,\varsigma,\sigma)\in(\!(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})\!)(\varsigma,\sigma)$, $(B,\sigma,\tau)\in(\!(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})\!)(\sigma,\tau)$ durch

(25) $(A,\varsigma,\sigma)(B,\sigma,\tau) := (AB,\varsigma,\tau)$

mit der üblichen Matrizenmultiplikation AB (im Falle $\varsigma=\varepsilon$ oder $\sigma=\varepsilon$ oder $\tau=\varepsilon$ sei AB die $(1(\varsigma)\times 1(\tau)$-Nullmatrix über $(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})$).

Das Produkt in $[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}]$ ist definiert für $(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}$ und für $a=((A_0,\varsigma,0);(A,\varsigma,\sigma))\in[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}](\varsigma,\sigma)$ und $b=((B_0,\sigma,0);(B,\sigma,\tau)\in[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}](\sigma,\tau)$ durch

(26) $ab := ((A_0+AB_0,\varsigma,0);(AB,\varsigma,\tau))\in[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}](\varsigma,\tau)$

mit der üblichen Matrizenmultiplikation AB_0 bzw. AB und mit der üblichen Matrixelementenweise-Addition A_0+AB_0 (imFalle $\varsigma=\varepsilon$ sei A_0+AB_0 die (0×1)-Nullmatrix über $(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})$).

Analog zu oben bezeichnen wir auch hier mit $\mathfrak{p}=(p_{\varsigma,\sigma,\tau})_{(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}}$ die durch das Produkt definierte Familie von (heterogenen) Operationen über den Mengen der Familie $(\!(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})\!)$ bzw. $[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}]$.

3.6. Lemma.
Seien b ein Schema vom Typ (ς,σ) und c ein Schema vom Typ (σ,τ) über Ω, $\varsigma,\sigma,\tau\in S^*$, und seien $v_f(b)\in[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}](\varsigma,\sigma)$, $v_f(c)\in[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}](\sigma,\tau)$ ihre freien äußeren Verhalten. Dann gilt für das freie äußere Verhalten $v_f(bc)\in[\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}](\varsigma,\tau)$ des Produkts $bc\in S_\Omega(\varsigma,\tau)$

$$v_f(bc)=v_f(b)v_f(c) \quad \text{in } [\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}}].$$

Für die zweiten Komponenten der freien äußeren Verhalten gilt

$$v_f^{(2)}(bc)=v_f^{(2)}(b)v_f^{(2)}(c) \quad \text{in } (\!(\widehat{\Sigma_{\tilde{\Omega}}})\!).$$

Beweis:
Seien $\varsigma=r_1\ldots r_m$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$, seien $B=(K_B,e_B,a_B,\gamma_B)$

ein Repräsentant von b und $C=(K_C,e_C,a_C,\gamma_C)$ ein Repräsentant von c mit $K_B \cap K_C = \emptyset$. BC ist dann ein Repräsentant von bc. Wir zeigen für die ersten Komponenten des freien äußeren Verhaltens von BC

$$v_f^{(1)}(BC)=v_f^{(1)}(B)+v_f^{(2)}(B)v_f^{(1)}(C).$$

Auf der linken sowie auf der rechten Seite steht eine (m×1)-Matrix über $(\hat{\xi},\hat{\alpha})$ vom Typ $(\varsigma,0)$.

Ist $w\in v_f^{(1)}(BC)_i$, $i\in[m]$, so gibt es nach der Definition von $v_f^{(1)}$ einen Weg α in BC von $e_{BC,i}=\overline{e_{B,i}}$ zu einem Nullknoten l von BC, dessen Marke $m(\alpha)=w$ ist. Dann muß aber entweder ein Nullknoten k in B mit $\overline{k}=l$ oder ein Nullknoten k' in C mit $\overline{k'}=l$ existieren. Im ersten Fall kann der Weg α in BC von $e_{BC,i}=\overline{e_{B,i}}$ nach $l=\overline{k}$ durch keinen der Knoten $\overline{a_{B,j}}$ ($j\in[n]$) gehen, da er dann nie zu einem Knoten $\overline{h}$ mit einem nicht-Ausgang-Knoten h von B zurückkämme. Der Weg α in BC geht also nur durch Knoten $\overline{h},\overline{h'},\ldots$ von BC, wobei $h,h',\ldots$ nicht-Ausgang-Knoten von B sind. Es gibt also einen Weg ß in B von $e_{B,i}$ nach k mit $\overline{ß}=\alpha$, dessen Marke $m(ß)=m(\alpha)=w$ ist. Nach der Definition von $v_f^{(1)}$ ist $w\in v_f^{(1)}(B)_i$. Im zweiten Fall muß der Weg α in BC von $e_{BC,i}=\overline{e_{B,i}}$ nach $l=\overline{k'}$ durch einen Knoten $\overline{a_{B,j}}=\overline{e_{C,j}}$, $j\in[n]$, gehen, da $k'\in K_C$ ist. Dann gibt es aber Wege ß' von $e_{B,i}$ zu $a_{B,j}$ in B und ß'' von $e_{C,j}$ zum Nullknoten k' in C mit $\alpha=\overline{ß'}\overline{ß''}$ und mit $m(\alpha)=m(\overline{ß'})m(\overline{ß''})=m(ß')m(ß'')$. Nach der Definition von $v_f^{(2)}$ bzw. $v_f^{(1)}$ sind $m(ß')\in v_f^{(2)}(B)_{ij}$ und $m(ß'')\in v_f^{(1)}(C)_j$, und nach der Definition der Matrizenmultiplikation gilt $w=m(\alpha)=m(ß')m(ß'')\in (v_f^{(2)}(B)v_f^{(1)}(C))_i$.

Sei jetzt $w\in(v_f^{(1)}(B)+v_f^{(2)}(B)v_f^{(1)}(C))_i$, $i\in[m]$. Dann ist $w\in v_f^{(1)}(B)_i$ oder $w\in v_f^{(2)}(B)_{ij}v_f^{(1)}(C)_j$, $j\in[n]$. Im ersten Fall gibt es (nach Def. von $v_f^{(1)}$) einen Weg ß in B von $e_{B,i}$ zu einem Nullknoten k von B mit $m(ß)=w$. Da $\overline{e_{B,i}}=e_{BC,i}$ und $\overline{k}$ ein Nullknoten von BC sind, und da für den Weg $\overline{ß}$ in BC von $\overline{e_{B,i}}=e_{BC,i}$ nach $\overline{k}$ $m(\overline{ß})=m(ß)=w$ gilt, folgt daraus $w\in v_f^{(1)}(BC)_i$. Im zweiten Fall, wenn $w\in v_f^{(2)}(B)_{ij}v_f^{(1)}(C)_j$ ist, $j\in[n]$, gibt es ein $u\in v_f^{(2)}(B)_{ij}$ und ein $v\in v_f^{(1)}(C)_j$, so daß $uv=w$. Dann existiert aber ein Weg ß' in B von $e_{B,i}$ nach $a_{B,j}$ mit $m(ß')=u$ und ein Weg ß'' in C von $e_{C,j}$ zu einem Nullknoten k' in C mit $m(ß'')=v$. Da $\overline{a_{B,j}}=\overline{e_{C,j}}$ gilt, ist $\overline{ß'}\overline{ß''}$ definiert und es ist ein Weg von $\overline{e_{B,i}}=e_{BC,i}$ zu dem Nullknoten $\overline{k}$ von BC mit der Marke $uv=w$. Es ist also $w\in v_f^{(1)}(BC)_i$.

Für die zweiten Komponenten verläuft der Beweis von $v_f^{(2)}(BC)=v_f^{(2)}(B)v_f^{(2)}(C)$ völlig analog.

Das Produkt in $\mathfrak{S}_{S,P}$ ist definiert für $(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}$ und für $(f,\varsigma,\sigma)\in\mathfrak{S}_{S,P}(\varsigma,\sigma)$, $(g,\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_{S,P}(\sigma,\tau)$ durch

(27) $(f,\varsigma,\sigma)(g,\sigma,\tau):=(fg,\varsigma,\tau)$

mit der üblichen Komposition von partiellen Abbildungen fg (g nach f). $\nu=(p_{\varsigma,\sigma,\tau})_{(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}}$ sei wieder die dadurch definierte Familie von Operationen über $\mathfrak{S}_{S,P}$. Das Produkt in $\mathfrak{S}_{S,F}$ ist die Einschränkung von ν auf $\mathfrak{S}_{S,F}$.

Es ist leicht einzusehen, daß für $(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}$ und für $(f,\varsigma,\sigma)\in\mathfrak{S}_{S,P}(\varsigma,\sigma)$, $(g,\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_{S,P}(\sigma,\tau)$ nach der Definition des Produkts von Berechnungsgraphen

(28) $\overline{B_{f,\varsigma,\sigma}}\,\overline{B_{g,\sigma,\tau}}=\overline{B_{fg,\varsigma,\tau}}$ in $\mathfrak{Y}_n$

gilt; nach der Definition des Produkts in $\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\tilde{x}}}\rangle\!\rangle$ gilt offensichtlich

(29) $(A_f,\varsigma,\sigma)(A_g,\sigma,\tau)=(A_{fg},\varsigma,\tau)$ in $\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\tilde{x}}}\rangle\!\rangle$,

und nach der Definition des Produkts in $[\widehat{\Sigma_{\tilde{x}}}]$ gilt

(30) $((A_{\overline{D_f}},\varsigma,0);(A_f,\varsigma,\sigma))((A_{\overline{D_g}},\sigma,0);(A_g,\sigma,\tau))=$

$=((A_{\overline{D_f}}+A_fA_{\overline{D_g}},\varsigma,0);(A_fA_g,\varsigma,\tau))=((A_{\overline{D_{fg}}},\varsigma,0);(A_{fg},\varsigma,\tau))$

in $[\widehat{\Sigma_{\tilde{x}}}]$. (Natürlich folgen die Gleichheiten (29) und (30) aus (28) und Lemma 3.6. Wir wollen jedoch ausdrücklich darauf hinweisen, daß (29) bzw. (30) eine von Schemata unabhängige Eigenschaft der Matrizen in $\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\tilde{x}}}\rangle\!\rangle$ bzw. der Matrizenpaare in $[\widehat{\Sigma_{\tilde{x}}}]$ ist, die wir mit den Elementen der Mengen in $\mathfrak{S}_{S,P}$ identifiziert haben.)

3.7. Lemma.
Nach der Einbettung von $\mathfrak{S}_{S,P}$ in $\mathfrak{Y}_n^{sf}$, $\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\tilde{x}}}\rangle\!\rangle$ bzw. $[\widehat{\Sigma_{\tilde{x}}}]$ ist das Produkt in $\mathfrak{Y}_n^{sf}$, $\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\tilde{x}}}\rangle\!\rangle$ bzw. $[\widehat{\Sigma_{\tilde{x}}}]$ eine Erweiterung des Produkts in $\mathfrak{S}_{S,P}$.

3.3. Tupeln

Seien $\sigma=s_1\ldots s_n\in S^+$, $\tau\in S^*$, seien für jedes $i\in[n]$ $b_i\in S_n(s_i,\tau)$ und $B_i=(K^i,e^i,a^i,\gamma^i)$ ein Repräsentant von b_i, und es gelte $K^i\cap K^j=\emptyset$ $(i\neq j,\ i,j\in[n])$.

Wir definieren einen Berechnungsgraphen $\langle B_1,\ldots,B_n\rangle$ vom Typ (σ,τ), indem wir, informell gesagt, die Berechnungsgraphen $B_1,\ldots,B_n$ nebeneinander legen und für jedes $j\in[p]$ die j-ten Ausgänge $a_j^1,\ldots,a_j^n$ identifizieren:

Wir definieren zuerst eine Abbildung

(31) $\bigcup_{i=1}^{n} K^i \to \mathcal{P}(\bigcup_{i=1}^{n} K^i):k\mapsto\overline{k}$ durch

$\overline{a_j^i}:=\{a_j^1,a_j^2,\ldots,a_j^n\}$ $(i\in[n],\ j\in[p])$

$\overline{k}:=k$ sonst.

Mit

(32) $\langle B_1,\ldots,B_n\rangle$

bezeichnen wir den Berechnungsgraphen (K,e,a,γ) definiert durch

$K:=\{\overline{k};k\in\bigcup_{i=1}^{n} K^i\}$

$e_i:=e_1^i$ $(i\in[n])$

$a_j:=\{a_j^1,a_j^2,\ldots,a_j^n\}$ $(j\in[p])$

$\gamma(\overline{k}):=(\ ,\overline{k_1},\ldots,\overline{k_m})$ falls $(\omega,k_1,\ldots,k_m)=\gamma^i(k)$, $i\in[n]$ $(k\in K)$.

Man sieht leicht, daß $\langle B_1,\ldots,B_n\rangle=(K,e,a,\gamma)$ wohl definiert ist, und daß es ein Berechnungsgraph über Ω vom Typ (σ,τ) ist. Ebenso evident ist di Richtigkeit der folgenden Behauptungen:

$\mathrm{Grad}\langle B_1,\ldots,B_n\rangle=\mathrm{Grad}(B_1)+\ldots+\mathrm{Grad}(B_n)$.

$\langle B_1,\ldots,B_n\rangle$ ist schleifenfrei, schleifenfrei Ω_σ-total bzw. schleifenfrei total genau dann, wenn es alle $B_1,\ldots,B_n$ sind.

Sei für jedes $i\in[n]$ $\widetilde{B}_i$ ein zu B_i isomorpher Berechnungsgraph und seien $\widetilde{K}^i\cap\widetilde{K}^j=\emptyset$ $(i\neq j,\ i,j\in[n])$. Dann ist $\langle\widetilde{B}_1,\ldots,\widetilde{B}_n\rangle$ isomorph zu $\langle B_1,\ldots,B_n\rangle$.

Wir können daher definieren ein Schema $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle\in S_\Omega(\sigma,\tau)$ durch

$\langle b_1,\ldots,b_n\rangle:=\overline{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}$.

Zusätzlich definieren wir für jedes $\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$

$\langle\emptyset\rangle:=\overline{B_{\emptyset:[0]\to[p],\varepsilon,\tau}}$ in $S_\Omega(\varepsilon,\tau)$ (s.(16),S.15).

Wir bezeichnen für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$ mit $t_{\sigma,\tau}$ die

Operation

$$S_{\mathcal{A}}(s_1,\tau)\times\ldots\times S_{\mathcal{A}}(s_n,\tau)\to S_{\mathcal{A}}(\sigma,\tau):(b_1,\ldots,b_n)\mapsto\langle b_1,\ldots,b_n\rangle.$$

Die Familie

$$\mathcal{A}:=(t_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$$

nennen wir das Tupeln in $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. Entsprechendes auch für ihre komponentenweise Einschränkung auf $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^{sf}$, $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^{sf,\mathcal{A}t}$ bzw. $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^{sf,t}$. $\mathcal{A}$ ist eine heterogene Operation ohne Stellenzahl über der jeweiligen Trägermengenfamilie. Es ist aber klar, daß wir mit dem gleichen Effekt statt $\mathcal{A}$ eine Menge $\{\mathcal{A}^{(0)},\mathcal{A}^{(1)},\mathcal{A}^{(2)},\ldots\}$ von heterogenen Operationen betrachten können mit $\mathcal{A}^{(n)}$ n-stellig.

Uns interessiert noch, wie sich das Tupeln von Schemata auf ihr freies äußeres Verhalten auswirkt.

Das **Tupeln** in $\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\mathcal{A}}}\rangle\!\rangle$ ist für $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$ und für $(A_i,s_i,\tau)\in\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\mathcal{A}}}\rangle\!\rangle(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$ definiert durch

$$(33)\quad \langle(A_1,s_1,\tau),\ldots,(A_n,s_n,\tau)\rangle:=\left(\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_n\end{pmatrix},\sigma,\tau\right)\in\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\mathcal{A}}}\rangle\!\rangle(\sigma,\tau).$$

Das Tupeln in $[\widehat{\Sigma_{\mathcal{A}}}]$ ist für $a_i=((A_i,s_i,0);(B_i,s_i,\tau))\in[\widehat{\Sigma_{\mathcal{A}}}](s_i,\tau)$ $(i\in[n])$ definiert durch

$$(34)\quad \langle a_1,\ldots,a_n\rangle:=\left(\left(\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_n\end{pmatrix},\sigma,0\right);\left(\begin{pmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_n\end{pmatrix},\sigma,\tau\right)\right)\in[\widehat{\Sigma_{\mathcal{A}}}](\sigma,\tau).$$

Mit $\mathcal{A}=(t_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ bezeichnen wir analog zu oben die dadurch definierte Familie von heterogenen Operationen über $\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\mathcal{A}}}\rangle\!\rangle$ bzw. $[\widehat{\Sigma_{\mathcal{A}}}]$.

Unmittelbar aus der Definition des freien äußeren Verhaltens und des Tupelns in $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, $\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\mathcal{A}}}\rangle\!\rangle$ und $[\widehat{\Sigma_{\mathcal{A}}}]$ folgt:

3.8. Lemma.
Seien $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$ und seien $b_i\in S_{\mathcal{A}}(s_i,\tau)$ und $v_f(b_i)\in[\widehat{\Sigma_{\mathcal{A}}}](s_i,\tau)$ sein freies äußeres Verhalten für jedes $i\in[n]$. Dann gilt für das freie äußere Verhalten $v_f(b)\in[\widehat{\Sigma_{\mathcal{A}}}](\sigma,\tau)$ von $b=\langle b_1,\ldots,b_n\rangle\in S_{\mathcal{A}}(\sigma,\tau)$

$$(35)\quad v_f(b)=\langle v_f(b_1),\ldots,v_f(b_n)\rangle \text{ in } [\widehat{\Sigma_{\mathcal{A}}}].$$

Für die zweiten Komponenten der freien äußeren Verhalten gilt

$$v_f^{(2)}(b)=\langle v_f^{(2)}(b_1),\ldots,v_f^{(2)}(b_n)\rangle \quad \text{in } (\!|\widehat{\Sigma_\sim}|\!).$$

Das Tupeln in $G_{S,P}$ ist für $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$ und für $(f_i,s_i,\tau)\in G_{S,P}(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$ definiert durch

$$\langle(f_1,s_1,\tau),\ldots,(f_n,s_n,\tau)\rangle:=(\langle f_1,\ldots,f_n\rangle,\sigma,\tau)\in G_{S,P}(\sigma,\tau)$$

mit der partiellen Abbildung $\langle f_1,\ldots,f_n\rangle:[n]\to[l(\tau)]$ definiert durch

(36) $\langle f_1,\ldots,f_n\rangle(j):=f_j(1)$ falls $f_j\neq\emptyset:[1]\to[l(\tau)]$

undefiniert sonst $(j\in[n])$.

Wir bezeichnen auch hier mit $t=(t_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ die dadurch definierte Familie von Operationen über $G_{S,P}$. Das Tupeln in $G_{S,P}$ ist ihre komponentenweise Einschränkung auf $G_{S,F}$. Direkt aus der Definition des Tupelns von Berechnungsgraphen ergibt sich für $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$ und für $(f_i,s_i,\tau)\in G_{S,P}(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$

$\langle\overline{B_{f_1,s_1,\tau}},\ldots,\overline{B_{f_n,s_n,\tau}}\rangle=\overline{B_{\langle f_1,\ldots,f_n\rangle,\sigma,\tau}}$ in $\mathcal{Y}_\Lambda$; für die entsprechenden Matrizen bzw. Matrizenpaare erhält man ebenso einfach $\langle(A_{f_1,s_1,\tau},\ldots,(A_{f_n,s_n,\tau})\rangle=(A_{\langle f_1,\ldots,f_n\rangle,\sigma,\tau}$ in $(\!|\widehat{\Sigma_\sim}|\!)$ bzw.

$$\langle((A_{\overline{D_{f_1}}},s_1,0);(A_{f_1,s_1,\tau})),\ldots,((A_{\overline{D_{f_n}}},s_n,0);(A_{f_n,s_n,\tau}))\rangle=$$

$$=((\begin{pmatrix}A_{\overline{D_{f_1}}}\\ \vdots\\ A_{\overline{D_{f_n}}}\end{pmatrix},\sigma,0);(A_{\langle f_1,\ldots,f_n\rangle,\sigma,\tau}))=$$

$$=((A_{\overline{D_{\langle f_1,\ldots,f_n\rangle}}},\sigma,0);(A_{\langle f_1,\ldots,f_n\rangle,\sigma,\tau})) \quad \text{in } [\widehat{\Sigma_\sim}].$$

3.9. Lemma.
Nach der Einbettung von $G_{S,P}$ in $\mathcal{Y}_\Lambda^{sf}$, $(\!|\widehat{\Sigma_\sim}|\!)$ bzw. $[\widehat{\Sigma_\sim}]$ ist das Tupeln in $\mathcal{Y}_\Lambda^{sf}$, $(\!|\widehat{\Sigma_\sim}|\!)$ bzw. $[\widehat{\Sigma_\sim}]$ eine Erweiterung des Tupelns in $G_{S,P}$.

3.4. Iteration

Seien $(s,\tau)\in S\times S^*$, $\tau=t_1\ldots t_p$, seien $b\in S_\Lambda(s,\tau s)$ und $B=(K,e,a,\gamma)$

ein Repräsentant von b.

Wir definieren die Iteration B^+ von B als einen Berechnungsgraphen vom Typ (s,τ), indem wir, informell gesagt, den (p+1)-ten Ausgang a_{p+1} von B (der die Marke s trägt, keine direkten Nachfolger hat) beseitigen und alle in ihn führenden Pfeile in den (einzigen) Eingang e_1 von B umlenken. Ist $a_{p+1}=e_1$, so beseitigen wir lediglich die Rolle dieses Knoten als (p+1)-ter Ausgang:

Wir definieren zuerst eine Abbildung $K \to K \cup \mathcal{P}(K): k \mapsto \overline{k}$ durch $\overline{e_1} := \{e_1, a_{p+1}\}$, $\overline{a_{p+1}} := \{e_1, a_{p+1}\}$, $\overline{k} := k$ sonst.

Die Iteration B^+ des Berechnungsgraphen B ist der Berechnungsgraph $(K^+, e^+, a^+, \gamma^+)$ definiert durch

$$K^+ := \{\overline{k}; k \in K\}$$

$$e_1^+ := \overline{e_1}$$

$$a_j^+ := \overline{a_j} = a_j \quad (j \in [p])$$

$$\gamma^+(\overline{a_{p+1}}) := (\omega, \overline{k_1}, \ldots, \overline{k_m}) \text{ mit } (\omega, k_1, \ldots, k_m) = \gamma(e_1) \text{ falls } e_1 \neq a_{p+1}$$

$$\gamma^+(\overline{a_{p+1}}) := ((s,0)) \text{ falls } e_1 = a_{p+1}$$

$$\gamma^+(\overline{k}) := (\omega, \overline{k_1}, \ldots, \overline{k_m}) \text{ mit } (\omega, k_1, \ldots, k_m) = \gamma(k) \text{ sonst für } \overline{k} \in K^+.$$

Nach der Konstruktion ist klar, daß $B^+ = (K^+, e^+, a^+, \gamma^+)$ ein Berechnungsgraph über Ω vom Typ (s,τ) ist mit $\mathrm{Grad}(B^+) = \mathrm{Grad}(B)$. Ist $\alpha = (k_1, (\omega_1, i_1), \ldots, k_r, (\omega_r, i_r), k_{r+1})$ bzw. $\alpha = (k_1, (\omega_1, i_1), \ldots, k_{r+1}, \omega_{r+1})$ ein Weg von k_1 nach k_{r+1} in B, so ist offensichtlich $\overline{\alpha} := (\overline{k_1}, (\omega_1, i_1), \ldots, \overline{k_r}, (\omega_r, i_r), \overline{k_{r+1}})$ bzw. $\overline{\alpha} := (\overline{k_1}, (\omega_1, i_1), \ldots, \overline{k_{r+1}}, \omega_{r+1})$ ein Weg von $\overline{k_1}$ nach $\overline{k_{r+1}}$ in B^+ mit der Marke $m(\overline{\alpha}) = m(\alpha)$. Ist B_1 ein Berechnungsgraph vom Typ $(s,\tau s)$ isomorph zu B, so ist offensichtlich B_1^+ isomorph zu B^+. Wir können daher definieren:

Die Iteration b^+ des Schemas b ist $b^+ := \overline{B^+}$.

Schleifenfreie Schemata bleiben unter der Iteration nicht erhalten. Wir bezeichnen für jedes $(s,\tau) \in S \times S^*$ mit $i_{s,\tau}$ die Operation $S_\Omega(s,\tau s) \to S_\Omega(s,\tau): b \mapsto b^+$. Die Familie $\dot{\iota} := (i_{s,\tau})_{(s,\tau) \in S \times S^*}$ nennen wir die Iteration in $\mathcal{G}_\Omega$.

Wir untersuchen noch die Auswirkung der Iteration von Schemata auf ihr freies äußeres Verhalten. Die Iteration in $\langle\!\langle \hat{\Sigma}_{\tilde{X}} \rangle\!\rangle$ ist definiert für $(s,\tau) \in S \times SP$, $p \geq 0$, und für $a = (\langle\!\langle A_1, \ldots, A_{p+1} \rangle\!\rangle, s, \tau s) \in \langle\!\langle \hat{\Sigma}_{\tilde{X}} \rangle\!\rangle(s, \tau s)$ durch

$$(37) \quad a^+ := (\langle\!\langle A_{p+1}^* A_1, A_{p+1}^* A_2, \ldots, A_{p+1}^* A_p \rangle\!\rangle, s, \tau) \in \langle\!\langle \hat{\Sigma}_{\tilde{X}} \rangle\!\rangle(s,\tau) \text{ mit}$$

(38) $A_{p+1}^{*} := 1_s + A_{p+1} + A_{p+1}A_{p+1} + A_{p+1}A_{p+1}A_{p+1} + \dots$ in $(\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}})(s,s)$,

in $[\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}]$ für $a=((A_0,s,0);(\langle\!\langle A_1,\dots,A_{p+1}\rangle\!\rangle,s,\tau s)) \in [\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}](s,\tau s)$ durch

(39) $a^{+} := ((A_{p+1}^{*}A_0,s,0);(\langle\!\langle A_{p+1}^{*}A_1, A_{p+1}^{*}A_2,\dots,A_{p+1}^{*}A_p\rangle\!\rangle,s,\tau)) \in [\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}](s,\tau)$

falls $A_{p+1} \neq 1_s$

(40) $a^{+} := (((s,0),s,0);(\langle\!\langle A_1,A_2,\dots,A_p\rangle\!\rangle,s,\tau)) \in [\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}](s,\tau)$ falls $A_{p+1} \neq 1$.

Wir bezeichnen wieder mit $\dot{\iota}=(i_{s,\tau})_{(s,\tau)\in S\times S^*}$ die dadurch definierte Familie von heterogenen Operationen über $\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}\rangle\!\rangle$ bzw. $[\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}]$.

3.10. Lemma.
Seien $(s,\tau)\in S\times S^*$, b ein Schema über Ω vom Typ $(s,\tau s)$ und $v_f(b)\in [\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}](s,\tau s)$ sein freies äußeres Verhalten. Für das freie äußere Verhalten $v_f(b^{+})\in[\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}](s,\tau)$ der Iteration $b^{+}\in S_{\Omega}(s,\tau)$ von b gilt

$$v_f(b^{+}) = v_f(b)^{+} \quad \text{in } [\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}].$$

Für die zweiten Komponenten der freien äußeren Verhalten gilt

$$v_f^{(2)}(b^{+}) = v_f^{(2)}(b)^{+} \quad \text{in } \langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}\rangle\!\rangle.$$

Beweis:
Sei $\tau=t_1\dots t_p$, $p\geq 0$, seien $B=(K,e,a,\gamma)$ ein Repräsentant von b und $B^{+}=(K^{+},e^{+},a^{+},\gamma^{+})$ die Iteration von B. B^{+} ist ein Repräsentant von b^{+}. Wir zeigen für die zweiten Komponenten $v_f^{(2)}(B)\in\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}\rangle\!\rangle(s,\tau s)$, $v_f^{(2)}(B^{+})\in\langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}\rangle\!\rangle(s,\tau)$ der freien äußeren Verhalten von B und B^{+}

$$v_f^{(2)}(B^{+}) = v_f^{(2)}(B)^{+} \quad \text{in } \langle\!\langle\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}\rangle\!\rangle.$$

Sei $w\in v_f^{(2)}(B^{+})_j$, $j\in[p]$. Nach der Definition von $v_f^{(2)}$ gibt es einen Weg α in B^{+} von e_1^{+} nach a_j^{+}

(41) $\alpha=(l_1,x_1,\dots,l_r,x_r,l_{r+1})$, $r\geq 1$, $l_1=e_1^{+},l_2,\dots,l_r,l_{r+1}=a_j^{+}\in K^{+}$,

$x_i\in\Sigma_{\tilde{\pi}}\setminus\tilde{\Omega}_o$ $(i\in[r])$

bzw.

(42) $\alpha=(l,t_j)$, $l=e_1^{+}=a_j^{+}$

mit der Marke $m(\alpha)=w$. Ist ß ein Weg von $e_1^{+}=\overline{a_{p+1}}$ nach $a_j^{+}=a_j$ in B^{+}, so bezeichnen wir für $k,k'\in K$ mit $k\,\text{⌋}\,ß$ bzw. $ß\,\text{⌊}\,k'$ die Folge, die durch die Ersetzung des Anfangs von ß durch k bzw. des Endes

von ß durch k' entsteht. Ist ß von positiver Länge, so ist $(k \lrcorner ß) \llcorner k' = k \lrcorner (ß \llcorner k)$ und wir lassen die Klammern weg. Für den Weg α in B^+ von $e_1^+ = \overline{a_{p+1}}$ nach $a_j^+ = a_j$ in (41) bzw. (42) beweisen wir zuerst die folgende

Behauptung. Entweder ist $e_1 \lrcorner \alpha$ ein Weg in B oder gibt es einen Weg α_1 in B^+ von $\overline{e_1}$ nach $\overline{e_1}$ von positiver Länge und einen Weg α' in B^+ von $\overline{e_1}$ nach a_j mit den Eigenschaften

$$\alpha = \alpha_1 \alpha'$$

und

$e_1 \lrcorner \alpha_1 \llcorner a_{p+1}$ ist ein Weg in B.

Beweis der Behauptung: Im Falle (42) ist wegen $e_1^+ = \overline{e_1}$ $e_1 \lrcorner \alpha$ ein Weg in B. Im Falle (41) nehmen wir an, $e_1 \lrcorner \alpha$ sei kein Weg in B. Dann gibt es Wege $ß_1$, ß in B^+ s.d. $\alpha = ß_1 ß$ und $ß_1$ der kürzeste Weg von positiver Länge in B^+ ist mit Ende $\overline{e_1}$. Ist $e_1 \lrcorner ß_1 \llcorner a_{p+1}$ ein Weg in B, so setzen wir $\alpha_1 := ß_1$, $\alpha' := ß$ und die Behauptung ist bewiesen. Ist das nicht der Fall, so muß nach der Konstruktion von B^+ $e_1 \lrcorner ß_1 \llcorner e_1$ ein Weg in B sein. Seien $q \in \mathbb{N}$ und $ß_1, ß_2, \ldots, ß_q, ß$ Wege in B^+ mit den Eigenschaften

$\alpha = ß_1 ß_2 \ldots ß_q ß$

$ß_i$ ist ein Weg von $\overline{e_1}$ nach $\overline{e_1}$ von positiver Länge $(i \in [q])$

$e_1 \lrcorner ß_i \llcorner e_1$ ist ein Weg in B $(i \in [q-1])$

$e_1 \lrcorner ß_q \llcorner a_{p+1}$ ist ein Weg in B.

Wir setzen $\alpha_1 := ß_1 ß_2 \ldots ß_q$, $\alpha' := ß$ und die Behauptung ist bewiesen.

Wir kehren jetzt zu unserem $w \in v_f^{(2)}(B^+)_j$ und dem Weg α in B^+ von $e_1^+ = \overline{e_1}$ nach $a_j^+ = a_j$ in (41) bzw. (42) mit der Marke $m(\alpha) = w$ zurück. Ist $e_1 \lrcorner \alpha$ ein Weg in B, so ist seine Marke $m(e_1 \lrcorner \alpha) = m(\alpha) = w$, und es folgt $w \in v_f^{(2)}(B)_j \subseteq v_f^{(2)}(B)^*_{p+1} v_f^{(2)}(B)_j = (v_f^{(2)}(B)^+)_j$. Ist das nicht der Fall, so gibt es nach der Behauptung Wege $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, α' in B, $m \geq 0$, mit den Eigenschaften

$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$

α_i ist ein Weg in B^+ von $\overline{e_1}$ nach $\overline{e_1}$ von positiver Länge $(i \in [m])$

$e_1 \lrcorner \alpha_i \llcorner a_{p+1}$ ist ein Weg in B $(i \in [m])$

$e_1 \lrcorner \alpha'$ ist ein Weg in B.

Für ihre Marken gilt offensichtlich

$m(\alpha_i) = m(e_1 \lrcorner \alpha_i \llcorner a_{p+1}) \in v_f^{(2)}(B)_{p+1}$ $(i \in [m])$

$m(\alpha') = m(e_1 \lrcorner \alpha') \in v_f^{(2)}(B)_j$

also gilt $w = m(\alpha) = m(\alpha_1) m(\alpha_2) \ldots m(\alpha_m) m(\alpha') \in (v_f^{(2)}(B)_{p+1})^m v_f^{(2)}(B)_j \subseteq v_f^{(2)}(B)^*_{p+1} v_f^{(2)}(B)_j = (v_f^{(2)}(B)^+)_j$.

Für die umgekehrte Inklusion sei $w \in (v_f^{(2)}(B)^+)_j = v_f^{(2)}(B)^*_{p+1} v_f^{(2)}(B)_j$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ und Wege $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

von e_1 nach a_{p+1} in B und einen Weg α' von e_1 nach a_j in B mit $m(\alpha_1)m(\alpha_2)\ldots m(\alpha_m)m(\alpha')=w$. Für die Wege $\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\ldots,\overline{\alpha_m}$ von $\overline{e_1}$ nach $\overline{a_{p+1}}=\overline{e_1}$ in B^+ und den Weg $\overline{\alpha'}$ von $\overline{e_1}$ nach $\overline{a_j}$ ist ihre Komposition $\overline{\alpha_1}\overline{\alpha_2}\ldots\overline{\alpha_m}\overline{\alpha'}$ definiert und es ist ein Weg in B^+ von $\overline{e_1}=e_1^+$ nach $\overline{a_j}=a_j^+$ mit der Marke w. Dann ist aber $w\in v_f^{(2)}(B^+)_j$.

Für die ersten Komponenten $v_f^{(1)}(B)=(A_0,s,0)$, $v_f^{(1)}(B^+)=(C_0,s,0)\in \in(\!(\widehat{\Sigma_{\mathfrak{N}}})\!)(s,0)$ der freien äußeren Verhalten von B und B^+ (A_0 bzw. C_0 ist die Menge der Marken aller Wege von e_1 zu Nullknoten in B bzw. von e_1^+ zu Nullknoten in B^+) verläuft der Beweis von

$C_0=A_{p+1}^*A_0$ bzw.

$C_0=(s,0)$ falls $A_{p+1}=s$ (A_{p+1} ist die Menge der Marken der Wege von e_1 zu a_{p+1} in B)

völlig analog.

Die Iteration in $\mathfrak{S}_{S,P}$ ist definiert für $(s,\tau)\in S\times S^*$ und für $(f,s,\tau s)\in\mathfrak{S}_{S,P}(s,\tau s)$ durch

(43) $(f,s,\tau s)^+:=(f^+,s,\tau)\in\mathfrak{S}_{S,P}(s,\tau)$

mit der partiellen Abbildung $f^+:[1]\to[1(\tau)]$ definiert durch $f^+(1):=f(1)$ falls $f(1)\in[1(\tau)]$, undefiniert sonst. $i=(i_{s,\tau})_{(s,\tau)\in S\times S^*}$ sei auch hier die dadurch definierte Familie von heterogenen Operationen über $\mathfrak{S}_{S,P}$.

Bei der Iteration gilt offensichtlich für $(s,\tau)\in S\times S^*$ und für $(f,s,\tau s)\in\mathfrak{S}_{S,P}(s,\tau s)$ $\overline{B_{f,s,\tau s}}^+=\overline{B_{f^+,s,\tau}}$ in $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{N}}$, nach der Definition der Iteration für Berechnungsgraphen; nach der Definition der Iteration in $(\!(\widehat{\Sigma_{\mathfrak{N}}})\!)$ bzw. $[\widehat{\Sigma_{\mathfrak{N}}}]$ gilt $(A_f,s,\tau s)^+=(A_{f^+},s,\tau)$ in $(\!(\widehat{\Sigma_{\mathfrak{N}}})\!)$ und $((A_{\overline{D_f}},s,0);(A_f,s,\tau s))^+=((A_{\overline{D_{f^+}}},s,0);(A_{f^+},s,\tau))$ in $[\widehat{\Sigma_{\mathfrak{N}}}]$.

3.11. Lemma.
Nach der Einbettung von $\mathfrak{S}_{S,P}$ in $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{N}}$, $(\!(\widehat{\Sigma_{\mathfrak{N}}})\!)$ bzw. $[\widehat{\Sigma_{\mathfrak{N}}}]$ ist die Iteration in $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{N}}$, $(\!(\widehat{\Sigma_{\mathfrak{N}}})\!)$ bzw. $[\widehat{\Sigma_{\mathfrak{N}}}]$ eine Erweiterung der Iteration in $\mathfrak{S}_{S,P}$.

3.5. Algebren von Schemata

In den Abschnitten 3.2, 3.3, 3.4 haben wir drei Familien von heterogenen Operationen über der Mengenfamilie $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{N}}$, $(\!(\widehat{\Sigma_{\mathfrak{N}}})\!)$, $[\widehat{\Sigma_{\mathfrak{N}}}]$ bzw. $\mathfrak{S}_{S,P}$ definiert, genannt Produkt, Tupeln und Iteration. Wir

wollen noch für jedes $(s,\tau)\in S\times S^*$ die Menge $I_S(s,\tau)$ als eine Menge von ausgezeichneten Elementen in $S_{\mathfrak{A}}(s,\tau)$, $(\!|\widehat{\Sigma_{\mathfrak{A}}}|\!)(s,\tau)$, $[\widehat{\Sigma_{\mathfrak{A}}}](s,\tau)$ und $G_{S,P}(s,\tau)$ betrachten (s. Abschnitt 3.1). I_S ist dann eine Familie von Mengen nullstelliger Operationen über $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$, $(\!|\widehat{\Sigma_{\mathfrak{A}}}|\!)$, $[\widehat{\Sigma_{\mathfrak{A}}}]$ und $G_{S,P}$. Auch die Familien $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{sf,t}$, $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{sf,\aleph_0 t}$, $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{sf}$ und $G_{S,F}$, die bezüglich des Produkts und Tupelns abgeschlossen sind, enthalten (in ihren Einschränkungen auf $S\times S^+$) komponentenweise I_S.

Wir nennen die heterogene Algebra (vgl. Higgins 1963, Birkhoff u. Lipson 1970) $(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}};I_S,\rho,\lambda,\iota)$ die Algebra von Schemata über $\mathfrak{A}$. Analog dazu heißen $(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{sf};I_S,\rho,\lambda)$ die Algebra der schleifenfreien Schemata über $\mathfrak{A}$, $(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{sf,\aleph_0 t},I_S,\rho,\lambda)$ die Algebra der schleifenfreien $\aleph_0$-totalen Schemata über $\mathfrak{A}$ und $(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{sf,t};I_S,\rho,\lambda)$ die Algebra der schleifenfreien totalen Schemata über $\mathfrak{A}$.

Wie üblich werden wir jede Algebra durch ihre Trägermengenfamilie bezeichnen, wenn keine Verwechslung droht. Wir erinnern daran daß

$$(44)\quad \mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{sf,t}\subseteq\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{sf,\aleph_0 t}\subseteq\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{sf}\subseteq(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}};I_S,\rho,\lambda)$$

gilt, als Unteralgebren. Nach der komponentenweisen Einbettung von $G_{S,F}$ in $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{sf,t}$ bzw. $G_{S,P}$ in $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{sf}$, $(\!|\widehat{\Sigma_{\mathfrak{A}}}|\!)$ und $[\widehat{\Sigma_{\mathfrak{A}}}]$ folgt aus den Lemmata 3.7(S.20), 3.9 (S.23) und 3.11 (S.27):

3.12. Satz.
Es gilt

$$(G_{S,F};I_S,\rho,\lambda)\subseteq(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{sf,t};I_S,\rho,\lambda)$$

$$(G_{S,P};I_S,\rho,\lambda)\subseteq(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{sf};I_S,\rho,\lambda)$$

$$(G_{S,P};I_S,\rho,\lambda,\iota)\subseteq(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}};I_S,\rho,\lambda,\iota)$$

$$(G_{S,P};I_S,\rho,\lambda,\iota)\subseteq(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{\widehat{\Sigma_{\mathfrak{A}}}};I_S,\rho,\lambda,\iota)$$

$$(G_{S,P};I_S,\rho,\lambda,\iota)\subseteq(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}^{\widehat{\Sigma_{\mathfrak{A}}}};I_S,\rho,\lambda,\iota)$$

als Unteralgebren.

Aus den Lemmata 3.2 (S.13), 3.3 (S.14), 3.4 (S.14) und 3.5 (S.16) und aus den Lemmata 3.6 (S.18), 3.8 (S.22) und 3.10 (S.25) folgt:

3.13. Satz.
$\nu_f: \mathcal{Y}_\Omega \to [\widehat{\Sigma_\sim}]$ ist ein Homomorphismus

(45) $\nu_f: (\mathcal{Y}_\Omega; I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{A}) \to ([\widehat{\Sigma_\sim}]; I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{A})$,

der $\mathfrak{S}_{S,P}$, Ω und $S\times\{0\}$ elementenweise festhält; $\nu_f^{(2)}: \mathcal{Y}_\Omega \to (\!|\widehat{\Sigma_\sim}|\!)$ ist ein Homomorphismus

(46) $\nu_f^{(2)}: (\mathcal{Y}_\Omega; I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{A}) \to ((\!|\widetilde{\Sigma_\sim}|\!); I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{A})$,

der $\mathfrak{S}_{S,P}$, $\Omega\sim\Omega_o$ und $S\times\{0\}$ elmentenwese festhält, mit $\nu_f^{(2)}(\Omega_o)=S\times\{0\}$ in $(\!|\widehat{\Sigma_\sim}|\!)$; $\nu_f: \mathcal{Y}_\Omega^{sf} \to [\widehat{\Sigma_\sim}]$ ist ein Homomorphismus

(47) $\nu_f: (\mathcal{Y}_\Omega^{sf}; I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A}) \to ([\widehat{\Sigma_\sim}]; I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A})$,

der $\mathfrak{S}_{S,P}$, Ω und $S\times\{0\}$ elmentenweise festhält; $\nu_f^{(2)}: \mathcal{Y}_\Omega^{sf} \to (\!|\widehat{\Sigma_\sim}|\!)$ ist ein Homomorphismus

(48) $\nu_f^{(2)}: (\mathcal{Y}_\Omega^{sf}; I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A}) \to ((\!|\widehat{\Sigma_\sim}|\!); I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A})$,

der $\mathfrak{S}_{S,P}$, $\Omega\sim\Omega_o$ und $S\times\{0\}$ elementenweise festhält, mit $\nu_f^{(2)}(\Omega_o)=S\times\{0\}$ in $(\!|\widehat{\Sigma_\sim}|\!)$; $\nu_f: \mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega_o t} \to [\widehat{\Sigma_\sim}]$ ist ein Homomorphismus

(49) $\nu_f: (\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega_o t}; I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A}) \to ([\widehat{\Sigma_\sim}]; I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A})$,

der $\mathfrak{S}_{S,F}$ und Ω elmentenweise festhält; $\nu_f^{(2)}: \mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega_o t} \to (\!|\widehat{\Sigma_\sim}|\!)$ ist ein Homomorphismus

(50) $\nu_f^{(2)}: (\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega_o t}; I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A}) \to ((\!|\widehat{\Sigma_\sim}|\!); I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A})$,

der $\mathfrak{S}_{S,F}$ und $\Omega\sim\Omega_o$ elmentenweise festhält, mit $\nu_f^{(2)}(\Omega_o)=S\times\{0\}$ in $(\!|\widehat{\Sigma_\sim}|\!)$; $\nu_f: \mathcal{Y}_\Omega^{sf,t} \to [\widehat{\Sigma_\sim}]$ ist ein Homomorphismus

(51) $\nu_f: (\mathcal{Y}_\Omega^{sf,t}; I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A}) \to ([\widehat{\Sigma_\sim}]; I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A})$,

der $\mathfrak{S}_{S,F}$ und $\Omega\sim\Omega_o$ elementenweise festhält; $\nu_f^{(2)}: \mathcal{Y}_\Omega^{sf,t} \to (\!|\widehat{\Sigma_\sim}|\!)$ ist ein Homomorphismus

(52) $\nu_f^{(2)}: (\mathcal{Y}_\Omega^{sf,t}; I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A}) \to ((\!|\widehat{\Sigma_\sim}|\!); I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A})$,

der $\mathfrak{S}_{S,F}$ und $\Omega\sim\Omega_o$ elementenweise festhält.

3.6. Heterogene algebraische Theorien

Eine heterogene Algebra $(\mathcal{T}; I_S, \mathcal{F})$ mit einer Familie $\mathcal{T}=(T(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ von Trägermengen $T(\sigma,\tau)$, mit der Familie $I_S=$

$=(I_S(s,\tau))_{(s,\tau)\in S\times S^*}$ (s.(3),S.12) als einer Familie von Mengen nullstelliger Operationen, mit einem assoziativem Produkt $\mu=(p_{\varsigma,\sigma,\tau})_{(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}}$

$$p_{\varsigma,\sigma,\tau}: T(\varsigma,\sigma)\ T(\sigma,\tau) \longrightarrow T(\varsigma,\tau):(a,b)\longmapsto ab \quad ((\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3})$$

und mit den Eigenschaften

(53) $(G_{S,F};I_S,\mu)$ ist eine Unteralgebra von $\mathcal{T}$

(54) sind $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$ und $a_i\in T(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$, so gibt es genau ein $a\in T(\sigma,\tau)$ derart, daß $(i_n,s_i,\sigma)a=a_i$ $(i\in[n])$

daran
(wir erinnern, daß $(i_n,s_i,\sigma)=(i:[1]\to[n],s_i,\sigma)\in I_S(s_i,\sigma)$ ist, s. Abschnitt 3.1, S.11) heißt eine heterogene algebraische Theorie; die nichtleere Menge S (s.S.1) heißt der Indexbereich von $\mathcal{T}$. Ein $\mathcal{T}$-Morphismus $\mathcal{T}\to\mathcal{T}'$ ist ein Algebren-Homomorphismus $(\mathcal{T};I_S,\mu)\to(\mathcal{T}';I_S,\mu)$ zweier Theorien $\mathcal{T},\mathcal{T}'$ über dem gleichen Indexbereich S.

Man sieht leicht, daß $(G_{S,F};I_S,\mu)$ selbst eine Theorie über dem Indexbereich S ist. $(G_{S,P};I_S,\mu)$ ist ebenfalls eine Theorie über S.

Wir erwähnen einige Eigenschaften einer Theorie $\mathcal{T}$ über S:

Nach (54) besteht für jedes $\tau\in S^*$ die Menge $T(\varepsilon,\tau)$ aus genau einem Element; nach (53) ist $(\emptyset:[0]\to[1(\tau)],\varepsilon,\tau)\in G_{S,F}(\varepsilon,\tau)$ dieses Element. Für $\sigma\in S^+$ kann die Menge $T(\sigma,\varepsilon)$ aus mehreren Elementen bestehen. $\mathcal{T}$ heißt eine Nullobjekt-Theorie, wenn jedes $T(s,\varepsilon)$, $s\in S$, einelementig ist. $(G_{S,P};I_S,\mu)$ ist z.B. eine Nullobjekt-Theorie.

Aus (54) folgt, daß in einer Nullobjekt-Theorie jede Menge $T(\sigma,\varepsilon)$, $\sigma\in S^*$ einelementig ist; es gilt außerdem: zu jedem $a\in T(\sigma,\tau)$, $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, gibt es genau eine Faktorisierung $a=bc$ mit $b\in T(\sigma,\varepsilon)$, $c\in T(\varepsilon,\tau)$.

Wegen der Eigenschaft (54) ist über der Mengenfamilie $\mathcal{T}$ eine Operation ohne Stellenzahl definiert, die für $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$ und $a_i\in T(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$ das eindeutig bestimmte Element $a\in T(\sigma,\tau)$ als Funktionswert liefert, für das $(i_n,s_i,\sigma)a=a_i$ für jedes i aus [n] gilt; wir bezeichnen $a=:\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ und nennen diese Operation das Tupeln in $\mathcal{T}$.

Ist $a\in T(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\ldots s_n\in S^+$, $\tau\in S^*$, so gilt nach (54) für die Produkte

(55) $(1_n,s_1,\sigma)a\ T(s_1,\sigma)$, $(2_n,s_2,\sigma)a\ T(s_2,\sigma)$, ..., $(n_n,s_n,\sigma)a\in T(s_n,\sigma)$

offensichtlich

(56) $\langle(1_n,s_1,\sigma)a,(2_n,s_2,\sigma)a,\ldots,(n_n,s_n,\sigma)a\rangle=a$.

Man nennt deshalb (55) die Komponenten von a. a ist durch seine Komponenten eindeutig bestimmt.

Wir werden manchmal das Tupeln in $\mathcal{T}$ explizit angeben, als eine Familie $\lambda=(t_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ mit

$$t_{\sigma,\tau}:T(s_1,\tau)\times\ldots\times T(s_n,\tau)\longrightarrow T(\sigma,\tau):(a_1,\ldots,a_n)\mapsto\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$$
$$((\sigma,\tau)\in S^{*2},\ \sigma=s_1\ldots s_n),$$

denn das Tupeln bleibt unter $\mathcal{Th}$-Morphismen erhalten:

Für einen $\mathcal{Th}$-Morphismus $\varphi:\mathcal{T}\to\mathcal{T}'$ und für $a_i\in T(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$, $\sigma=s_1\ldots s_n,\tau\in S$, gilt

$$(i_n,s_i,\sigma)(\varphi\langle a_1,\ldots,a_n\rangle)=(\varphi(i_n,s_i,\sigma))(\varphi\langle a_1,\ldots,a_n\rangle)=$$
$$=\varphi((i_n,s_i,\sigma)\langle a_1,\ldots,a_n\rangle)=\varphi(a_i)\qquad(i\in[n]),$$

so daß nach (56)

$$\varphi\langle a_1,\ldots,a_n\rangle=\langle(1_n,s_1,\sigma)\varphi\langle a_1,\ldots,a_n\rangle,(2_n,s_2,\sigma)\varphi\langle a_1,\ldots,a_n\rangle,\ldots,(n_n,s_n,\sigma)\varphi\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\rangle=\langle\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_n)\rangle.$$

Wenn wir also das Tupeln λ in jeder Theorie explizit angeben, so ist ein $\mathcal{Th}$-Morphismus $\varphi:\mathcal{T}\to\mathcal{T}'$ ein Algebren-Homomorphismus $\varphi:(\mathcal{T};I_S,\rho,\lambda)\to(\mathcal{T}';I_S,\rho,\lambda)$. Da wir in $\mathcal{T}$ aus den Elementen der Mengen in I_S durch Tupeln offensichtlich ganz $\mathfrak{G}_{S,F}$ erhalten, gilt außerdem:

(57) Jeder $\mathcal{Th}$-Morphismus hält $\mathfrak{G}_{S,F}$ elementenweise fest.

Wir nennen eine Theorie $\mathcal{T}$ iterativ, wenn sie $(\mathfrak{G}_{S,P};I_S,\rho)$ als Unteralgebra enthält und wenn es über der Trägermengenfamilie $\mathcal{T}$ eine Operation $\iota=(i_{s,\tau s})_{(s,\tau)\in S\times S^*}$ gibt mit $i_{s,\tau s}:T(s,\tau s)\to T(s,\tau)$ $((s,\tau)\in S\times S^*)$, die die Iteration in $\mathfrak{G}_{S,P}$ (s.S.46) erweitert; ι nennen wir die Iteration in $\mathcal{T}$, mit a^+ bezeichnen wir das Abbild eines Elements a unter der Iteration.

Ein $\iota\mathcal{Th}$-Morphismus $\mathcal{T}\to\mathcal{T}'$ ist ein Algebren-Homomorphismus $(\mathcal{T};I_S,\rho,\lambda,\iota)\to(\mathcal{T}';I_S,\rho,\lambda,\iota)$ zweier iterativen Theorien über dem gleichen Indexbereich S. $(\mathfrak{G}_{S,P};I_S,\rho,\lambda,\iota)$ selbst ist eine iterative Theorie über S.

Die Iteration von $(1:[1]\to[1],s,s)\in I_S(s,s)$, $s\in S$, in $\mathfrak{G}_{S,P}$ ist $(\emptyset:[1]\to[0],s,\varepsilon)\in\mathfrak{G}_{S,P}(s,\varepsilon)$. Es ist nicht schwer einzusehen, daß man in $\mathfrak{G}_{S,P}$ (oder in der dazu isomorphen Unteralgebra von $\mathcal{G}_\Omega$, $(\!(\widehat{\Sigma_{\tilde\Omega}})\!)$ oder $[\widehat{\Sigma_{\tilde\Omega}}]$) aus den Elementen der Mengen in I_S und in $\mathfrak{G}_{S,P}|_{S\times\{\varepsilon\}}$ (was wir in $\mathcal{G}_\Omega$, $(\!(\widehat{\Sigma_{\tilde\Omega}})\!)$ und $[\widehat{\Sigma_{\tilde\Omega}}]$ mit $S\times\{0\}$ identifiziert haben) mit Hilfe des Produkts und Tupelns ganz $\mathfrak{G}_{S,P}$ erhält. Folgerung:

(50) Jeder $\iota\mathcal{Th}$-Morphismus hält $\mathfrak{G}_{S,P}$ elementenweise fest.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $(s,0)$ das Element $(\emptyset:[1]\to[0],s,\varepsilon)$ aus $\mathfrak{S}_{S,P}(s,\varepsilon)$, für jedes $s\in S$, s.d. $\mathfrak{S}_{S,P}|_{S\times\{\varepsilon\}}=S\times\{0\}$.

Aus den Definitionen von $(\!(\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}})\!)$ und $[\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}]$ und der Operationen I_S, $\not\vdash$, λ und ι über diesen Mengenfamilien ist klar, daß $((\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}\!));I_S,\not\vdash,\lambda)$, $([\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}];I_S,\not\vdash,\lambda)$ Theorien und $((\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}\!));I_S,\not\vdash,\lambda,\iota)$, $([\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}];I_S,\not\vdash,\lambda,\iota)$ iterative Theorien über dem Indexbereich S sind, wobei das Tupeln λ der Algebren das Theorie-Tupeln ist. Die Algebren $\mathcal{S}_\Omega$, $\mathcal{S}_\Omega^{sf}$, $\mathcal{S}_\Omega^{sf,\lambda_0 t}$ und $\mathcal{S}_\Omega^{sf,t}$ sind keine Theorien, da sie die Eigenschaft (54),S.30 nicht besitzen. Jedoch ihre Abbilder unter dem Homomorphismus v_f bzw. $v_f^{(2)}$ sind Unteralgebren der Theorien $[\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}]$ bzw. $(\!(\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}})\!)$. Wenn wir mit $\mathcal{K}_{v_f}=(K_{v_f}(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ bzw. $\mathcal{K}_{v_f^{(2)}}=(K_{v_f^{(2)}}(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ die Kernäquivalenz von v_f bzw. $v_f^{(2)}$ auf $\mathcal{S}_\Omega$ bezeichnen (d.h. es ist für $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$ und $b,b'\in S_\Omega(\sigma,\tau)$

$$(b,b')\in K_{v_f}(\sigma,\tau) \iff v_f(b)=v_f(b') \quad \text{bzw.}$$

$$(b,b')\in K_{v_f^{(2)}}(\sigma,\tau) \iff v_f^{(2)}(b)=v_f^{(2)}(b')\ ),$$

und analog dazu mit $\mathcal{K}_{v_f,sf}$, $\mathcal{K}_{v_f,sf,\lambda_0 t}$, $\mathcal{K}_{v_f,sf,t}$ bzw. $\mathcal{K}_{v_f^{(2)},sf}$, $\mathcal{K}_{v_f^{(2)},sf,\lambda_0 t}$, $\mathcal{K}_{v_f^{(2)},sf,t}$ der Reihe nach die Kernäquivalenzen von v_f bzw. $v_f^{(2)}$ auf $\mathcal{S}_\Omega^{sf}$, $\mathcal{S}_\Omega^{sf,\lambda_0 t}$, $\mathcal{S}_\Omega^{sf,t}$, so folgt aus dem Satz 3.13 (S. 29), daß es alles Kongruenzen der zugehörigen Algebren sind, und daß für die Quotientenalgebren nach diesen Kongruenzen folgende Isomorphismen gelten:

(59) $\mathcal{S}_\Omega/\mathcal{K}_{v_f}=(S_\Omega(\sigma,\tau)/K_{v_f}(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}\cong v_f(\mathcal{S}_\Omega)\subseteq([\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}];I_S,\not\vdash,\lambda,\iota)$

(60) $\mathcal{S}_\Omega^{sf}/\mathcal{K}_{v_f,sf}\cong v_f(\mathcal{S}_\Omega^{sf})\subseteq([\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}];I_S,\not\vdash,\lambda)$

(61) $\mathcal{S}_\Omega^{sf,\lambda_0 t}/\mathcal{K}_{v_f,sf,\lambda_0 t}\cong v_f(\mathcal{S}_\Omega^{sf,\lambda_0 t})$

(62) $\mathcal{S}_\Omega^{sf,t}/\mathcal{K}_{v_f,sf,t}\cong v_f(\mathcal{S}_\Omega^{sf,t})$

und

(63) $\mathcal{S}_\Omega/\mathcal{K}_{v_f^{(2)}}\cong v_f^{(2)}(\mathcal{S}_\Omega)\subseteq((\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}\!));I_S,\not\vdash,\lambda,\iota)$

(64) $\mathcal{S}_\Omega^{sf}/\mathcal{K}_{v_f^{(2)},sf}\cong v_f^{(2)}(\mathcal{S}_\Omega^{sf})\subseteq((\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}\!));I_S,\not\vdash,\lambda)$

(65) $\mathcal{S}_\Omega^{sf,\lambda_0 t}/\mathcal{K}_{v_f^{(2)},sf,\lambda_0 t}\cong v_f^{(2)}(\mathcal{S}_\Omega^{sf,\lambda_0 t})$

(66) $\mathcal{S}^{sf,t}/\mathcal{K}_{v_f^{(2)},sf,t}\cong v_f^{(2)}(\mathcal{S}_\Omega^{sf,t})$.

Nach Definition ist die zweite Komponente des freien äußeren Verhaltens jedes Schemas $b \in S_\Omega(s,\varepsilon)$, $s \in S$, $v_f^{(2)}(b) = (\emptyset : [1] \to [0], s, \varepsilon) \in \widehat{(\!|\Sigma_\Sigma|\!)}(s,\varepsilon)$ (s.(29),S.10). Das Bedeutet aber, daß für jedes $s \in S$ die Menge $v_f^{(2)}(S_\Omega(s,\varepsilon))$ (und damit auch $v_f^{(2)}(S_\Omega^{sf}(s,\varepsilon))$ und $v_f^{(2)}(S_\Omega^{sf,\lambda_o t}(s,\varepsilon))$) aus genau einem Element besteht.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wollen wir im Folgenden für zwei Indexbereiche $I \supseteq J$ und für zwei Mengenfamilien $\mathfrak{M} = (M_i)_{i \in I}$, $\mathfrak{N} = (N_i)_{i \in J}$ unter einer komponentenweisen Inklusion $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ die Familie von Relationen $N_i \subseteq M_i$ $(i \in J)$ verstehen. (Im Vergleich zu (4), S.2 bedenke man, daß die Mengenfamilie $\mathfrak{N}$ über dem Indexbereich J durch Hinzunahme von indizierten leeren Mengen zu einer Familie über dem Indexbereich I gemacht werden kann.) Mit dieser Bezeichnung gilt dann z.B., daß jede iterative Theorie $S \times \{0\} = \mathfrak{S}_{S,P}|_{S \times \{\varepsilon\}}$ komponentenweise enthält.

Aus den obigen Bemerkungen und aus dem Satz 3.13, S.29 folgt jetzt:

3.14. Satz.

$\mathfrak{Y}_\Omega / \mathcal{K}_{v_f} \cong v_f(\mathfrak{Y}_\Omega)$ ist eine iterative Theorie, die Ω enthält;

$\mathfrak{Y}_\Omega / \mathcal{K}_{v_f^{(2)}} \cong v_f^{(2)}(\mathfrak{Y}_\Omega)$ ist eine iterative Nullobjekt-Theorie, die $\Omega \setminus \Omega_o$ enthält;

$\mathfrak{Y}_\Omega^{sf} / \mathcal{K}_{v_{f,sf}} \cong v_f(\mathfrak{Y}_\Omega^{sf})$ ist eine Theorie, die Ω und $S \times \{0\}$ enthält;

$\mathfrak{Y}_\Omega^{sf} / \mathcal{K}_{v_{f,sf}^{(2)}} \cong v_f^{(2)}(\mathfrak{Y}_\Omega^{sf})$ ist eine Nullobjekt-Theorie, die $\Omega \setminus \Omega_o$ und $S \times \{0\}$ enthält;

$\mathfrak{Y}_\Omega^{sf,\lambda_o t} / \mathcal{K}_{v_{f,sf,\lambda_o t}} \cong v_f(\mathfrak{Y}_\Omega^{sf,\lambda_o t})$ ist eine Theorie, die Ω enthält;

$\mathfrak{Y}_\Omega^{sf,\lambda_o t} / \mathcal{K}_{v_{f,sf,\lambda_o t}^{(2)}} \cong v_f^{(2)}(\mathfrak{Y}_\Omega^{sf,\lambda_o t})$ ist eine Nullobjekt-Theorie, die $\Omega \setminus \Omega_o$ und $S \times \{0\}$ enthält;

$\mathfrak{Y}_\Omega^{sf,t} / \mathcal{K}_{v_{f,sf,t}} \cong v_f(\mathfrak{Y}_\Omega^{sf,t})$ ist eine Theorie, die $\Omega \setminus \Omega_o$ enthält;

$\mathfrak{Y}^{sf,t} / \mathcal{K}_{v_{f,sf,t}} \cong v_f^{(2)}(\mathfrak{Y}_\Omega^{sf,t})$ ist eine Theorie, die $\Omega \setminus \Omega_o$ enthält.

Wir erinnern daran, daß die erste Komponente des freien äußeren Verhaltens jedes schleifenfreien totalen Schemas eine Nullmatrix ist (vgl. S.10 unten), so daß

$$v_f(b) = v_f(c) \iff v_f^{(2)}(b) = v_f^{(2)}(c) \quad \text{in } \mathfrak{Y}_\Omega^{sf,t},$$

und deshalb

$$(67) \quad v_f(\mathfrak{Y}_\Omega^{sf,t}) \cong \mathfrak{Y}_\Omega^{sf,t} / \mathcal{K}_{v_{f,sf,t}} \cong \mathfrak{Y}_\Omega^{sf,t} / \mathcal{K}_{v_{f,sf,t}} \cong v_f^{(2)}(\mathfrak{Y}_\Omega^{sf,t}).$$

§4. Satz über Generatoren

Die in §2, Abschnitt 2.4 definierten komponentenweisen Abbildungen ν_f, $\nu_f^{(2)}$ von Schemata über einer Zeichenmenge Ω haben sich in §3 als Homomorphismen der Algebren von Schemata in gewisse algebraische Theorien erwiesen. Es gilt allgemein:

4.1. Satz.
Sei

(1) $\varphi:(\mathfrak{S}_\Omega;I_S,\mathfrak{f},\lambda,\iota)\longrightarrow(\mathcal{T};I_S,\mathfrak{f},\lambda,\iota)$ bzw.

(2) $\varphi:(\mathfrak{S}_\Omega^{sf};I_S,\mathfrak{f},\lambda)\longrightarrow(\mathcal{T};I_S,\mathfrak{f},\lambda)$ bzw.

(3) $\varphi:(\mathfrak{S}_\Omega^{sf,\Omega_0 t};I_S,\mathfrak{f},\lambda)\longrightarrow(\mathcal{T};I_S,\mathfrak{f},\lambda)$ bzw.

(4) $\varphi:(\mathfrak{S}_\Omega^{sf,t};I_S,\mathfrak{f},\lambda)\longrightarrow(\mathcal{T};I_S,\mathfrak{f},\lambda)$

ein Homomorphismus in eine iterative Theorie $(\mathcal{T};I_S,\mathfrak{f},\lambda,\iota)$ bzw. in eine Theorie $(\mathcal{T};I_S,\mathfrak{f},\lambda)$, mit der folgenden Eigenschaft:

(5) Ist $b=\overline{(K,e,a,\gamma)}$ aus $S_\Omega(s,\tau)$ bzw. $S_\Omega^{sf}(s,\tau)$ oder $S_\Omega^{sf,\Omega_0 t}(s,\tau)$ oder $S_\Omega^{sf,t}(s,\tau)$, $(s,\tau)\in S\times S^+$, $\tau=t_1\ldots t_p$ und ist $e_1=a_j$, $j\in[p]$, so ist $\varphi(b)=\varphi(\overline{B_{j_p,s,\tau}})=(j:[1]\to[p],s,\tau)\in I_S(s,\tau)$.

Dann gilt:

$$\varphi(\mathfrak{S}_\Omega)=[\varphi(\Omega)]_{(\mathcal{T};I_S,\mathfrak{f},\lambda,\iota)} \quad \text{bzw.}$$

$$\varphi(\mathfrak{S}_\Omega^{sf})=[\varphi(\Omega),\varphi(S\times\{0\})]_{(\mathcal{T};I_S,\mathfrak{f},\lambda)} \quad \text{bzw.}$$

$$\varphi(\mathfrak{S}_\Omega^{sf,\Omega_0 t})=[\varphi(\Omega)]_{(\mathcal{T};I_S,\mathfrak{f},\lambda)} \quad \text{bzw.}$$

$$\varphi(\mathfrak{S}_\Omega^{sf,t})=[\varphi(\Omega\setminus\Omega_0)]_{(\ ;I_S,\mathfrak{f},\lambda)},$$

wobei für Mengenfamilien $\mathcal{M},\mathcal{N}\subseteq\mathcal{T}$, komponentenweise, $[\mathcal{M},\mathcal{N}]_{(\mathcal{T};I_S,\mathfrak{f},\ldots)}$ die kleinste (bezüglich der komponentenweisen Inklusion) in $\mathcal{T}$ enthaltene Mengenfamilie bezeichnet, die $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ enthält und die gegenüber den Operationen $I_S,\mathfrak{f},\ldots$ in $\mathcal{T}$ abgeschlossen ist.

Beweis:
Wir beweisen zuerst die Behauptung bezüglich $\varphi(\mathfrak{S}_\Omega)$. Sei $\mathcal{L}:=(L(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}\subseteq\mathcal{T}$, komponentenweise, die kleinste Mengenfa-

milie mit den Eigenschaften

(6) $\varphi(\Omega)\subseteq\mathcal{K}$, komponentenweise

(7) $\mathcal{K}$ ist gegenüber den Operationen I_S,$\mathfrak{k}$,$\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{i}$ in $\mathcal{T}$ abgeschlossen.

Die Mengenfamilie $\varphi(\mathcal{S}_\Omega)$ besitzt natürlich die Eigenschaft (6), und weil φ nach Voraussetzung ein Algebren-Homomorphismus (1) ist, gilt auch (7) für $\varphi(\mathcal{S}_\Omega)$. Deshalb ist $\mathcal{K}\subseteq\varphi(\mathcal{S}_\Omega)$, komponentenweise.

Wir definieren für jedes $a\in\varphi(S_\Omega(\sigma,\tau))$, $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\mathrm{Grad}(a):=$ $:=\mathrm{Min}\{\mathrm{Grad}(b);b\in S_\Omega(\sigma,\tau),\ \varphi(b)=a\}$. Durch Induktion nach dem Grad in $\varphi(\mathcal{S}_\Omega)$ zeigen wir die komponentenweise Inklusion $\varphi(\mathcal{S}_\Omega)\subseteq\mathcal{K}$. Sei

(8) $a\in\varphi(S_\Omega(\sigma,\tau))$, $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\tau=t_1\ldots t_p$.

Im Falle $\sigma=\varepsilon$ ist a das einzige Element $(\emptyset:[0]\to[p],\varepsilon,\tau)\in G_{S,F}(\varepsilon,\tau)$ in der Theorie $\mathcal{T}$, und weil $(\emptyset:[0]\to[p],\varepsilon,\tau)=\langle\emptyset\rangle$ ist, das „nullstellige Tupeln" in $\mathcal{T}$, und weil $\mathcal{K}$ nach (7) gegenüber dem Tupeln in $\mathcal{T}$ abgeschlossen ist, gilt $a=\langle\emptyset\rangle\in L(\varepsilon,\tau)$. Im Folgenden betrachten wir also nur den Fall $\sigma\neq\varepsilon$.

Ist $\mathrm{Grad}(a)=0$ und sind $b\in S_\Omega(\sigma,\tau)$, $\varphi(b)=a$, $\mathrm{Grad}(b)=0$, und ist B ein Repräsentant von b, so ist jeder Knoten von B ein Ausgang. Dann kann man aber $b=\overline{B}$ durch Tupeln von Schemata aus den Schemata $\overline{B_i:[1]\to[p],t_i,\tau}$ $(i\in[p])$ erhalten, d.h. man kann b in $\mathcal{S}_\Omega$ durch Tupeln aus den Elementen von I_S konstruieren, und weil φ ein Homomorphismus und $\mathcal{K}$ nach (7) gegenüber den Operationen I_S und Tupeln abgeschlossen ist, folgt $a=\varphi(b)\in L(\sigma,\tau)$.

Wir nehmen jetzt an:

(9) Sei $\mathrm{Grad}(a)\geq 1$, sei $B=(K,e,a,\gamma)$ ein Berechnungsgraph über Ω vom Typ (σ,τ) mit $\varphi(\overline{B})=a$ und mit $\mathrm{Grad}(B)=\mathrm{Grad}(a)$.

Fall 1. Sei $\sigma=s\in S$. Wir betrachten hier den Fall, daß für den (einzigen) Eingang e_1 von B

(10) $(k,e_1)\notin\nu^+$ $(k\in K)$

gilt, wobei ν die direkt-Nachfolger-Relation von B ist (s.(9), (10),S.3). Der Knoten e_1 ist kein Ausgang von B, da sonst nach der Voraussetzung (1) $\varphi(B)=\varphi(\overline{B_{j_p,s,\tau}})=(j:[1]\to[p],s,\tau)\in I_S(s,\tau)$ wäre, was wegen $\mathrm{Grad}(\overline{B_{j_p,s,\tau}})=0$ der Annahme $\mathrm{Grad}(a)\geq 1$ widerspricht. Sei $\omega\in\tilde{\Omega}^s_\varsigma$, $\varsigma=r_1\ldots r_m\in S^*$, die Marke des Knoten e_1. Wir bezeichnen mit C den Berechnungsgraphen (K',e',a',γ') über Ω vom Typ (ς,τ) definiert durch

(11) $K':=K\setminus\{e_1\}$

$e'_i:=k_i$ $(i\in[m])$ mit $(\omega,k_1,\ldots,k_m)=\gamma(e_1)$

$a':=a$

$\gamma' := \gamma|_{K\setminus\{e_1\}}$.

Da e_1 kein Ausgang von B ist, gilt Grad(C)=Grad(B)-1. Für die Berechnungsgraphen B_ω (s.(4),S.12 bzw. (9),S.14) und C gilt offensichtlich

(12) $\overline{B_\omega}\overline{C}=\overline{B}$ in $\mathcal{G}_\Omega$ und

(13) $\varphi(\overline{B_\omega})\varphi(\overline{C})=\varphi(\overline{B})$ in $\mathcal{T}$,

da φ ein Homomorphismus ist. Für $\omega\in\Omega^S_\varsigma$ ist wegen der Eigenschaft (6) von $\mathcal{L}$ $\varphi(\overline{B_\omega})\in L(s,\varsigma)$; ist $\omega=(s,0)$, so wissen wir, daß $\overline{B_{s,0}}=(\overline{B_{1:[1]\to[1],s,s}})^+$ in $\mathcal{G}_\Omega$ ist, und weil φ ein Homomorphismus ist und $\mathcal{L}$ gegenüber den Operationen I_S und Iteration in $\mathcal{T}$ abgeschlossen ist, folgt wieder $\varphi(\overline{B_\omega})\in L(s,\varsigma)$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $\varphi(\overline{C})\in L(\varsigma,\tau)$. Aus der Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}$ gegenüber dem Produkt in $\mathcal{T}$ folgern wir $a=\varphi(\overline{B})\in L(s,\tau)$.

Fall 2. Sei wieder $\sigma=s\in S$, und es gelte nicht die Annahme (10) aus dem Fall 1. Wir konstruieren aus dem Berechnungsgraphen B=(K,e,a,γ) einen neuen Berechnungsgraphen C=(K',e',a',γ') vom Grad(C)=Grad(B) mit der Eigenschaft (10); informell gesagt, wir fügen zu der Knotenmenge K einen neuen Knoten in der Rolle des (p+1)-ten Ausgangs hinzu, und lenken alle ursprünglich in e_1 hineingehende Pfeile in diesen neuen Ausgang um. Sei also $1\notin K$, sei $k\mapsto\overline{k}$ eine Abbildung $K\to(K\setminus\{e_1\})\cup\{1\}$ definiert durch $\overline{e_1}:=1$, $\overline{k}:=k$ sonst für $k\in K$. Mit C bezeichnen wir den Berechnungsgraphen (K',e',a',γ') über Ω vom Typ $(s,\tau s)$ definiert durch

(14) $K':=K\cup\{1\}$

$e'_1:=e_1$

$a'_j:=a_j$ $(j\in[p])$

$a'_{p+1}:=1$

$\gamma'(k):=(\omega,\overline{k_1},\ldots,\overline{k_m})$ mit $(\omega,k_1,\ldots,k_m)=\gamma(k)$ $(k\in K)$

$\gamma'(1):=(s)$.

Der Berechnungsgraph C ist so konstruiert, daß seine Iteration $C^+=B$ ist. Weil φ ein Homomorphismus ist, gilt $\varphi(\overline{C}^+)=\varphi(C)^+$ in $\mathcal{T}$. C besitzt aber die Eigenschaft (10), so daß $\varphi(\overline{C})\in L(s,\tau s)$ gilt, nach dem Fall 1. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}$ gegenüber der Iteration folgt daraus $a=\varphi(\overline{B})=\varphi(\overline{C}^+)=\varphi(\overline{C})^+\in L(s,\tau)$.

Fall 3. Sei jetzt $\sigma=s_1\ldots s_n\in S^*$, $n\geq 2$. Sei für jedes $i\in[n]$ B_i der Berechnungsgraph (K^i,e^i,a^i,γ^i) über Ω vom Typ (s_i,τ) definiert durch

(15) $K^i:=K$

$e^i_1:=e_1$

$a^i := a$

$\gamma^i := \gamma$.

Man sieht leicht, daß $\overline{B_i} = \overline{B_{i:[1]\to[n],s_i,\sigma}}\,\overline{B} = (i_n,s_i,\sigma)\overline{B}$ in $\mathcal{Y}_\Omega$ ist $(i\in[n])$. Es gilt offensichtlich $\mathrm{Grad}(B_i)=\mathrm{Grad}(B)$ $(i\in[n])$. Da φ ein Homomorphismus ist, gilt für die i-te Komponente $a_i = (i:[1]\to[n],s_i,\sigma)a$ von $a=\varphi(\overline{B})$ in der Theorie $\mathcal{T}$

$$(i_n,s_i,\sigma)a = \varphi(i_n,s_i,\sigma)\varphi(\overline{B}) = \varphi((i_n,s_i,\sigma)\overline{B}) = \varphi(\overline{B_i}),$$

und deshalb ist $\mathrm{Grad}(a_i)\leq\mathrm{Grad}(\overline{B_i})=\mathrm{Grad}(\overline{B})=\mathrm{Grad}(a)$ $(i\in[n])$. Nach den Fällen 1 und 2 ist $a_i\in L(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$, woraus wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}$ gegenüber dem Tupeln in der Theorie $\mathcal{T}$ $a=\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\in L(\sigma,\tau)$ folgt.

Damit ist der Beweis der Behauptung bezüglich $\varphi(\mathcal{Y}_\Omega)$ beendet. Der Beweis der Behauptungen bezüglich der Unteralgebren $\varphi(\mathcal{Y}_\Omega^{sf})$, $\varphi(\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\mathcal{L}ot})$ und $\varphi(\mathcal{Y}_\Omega^{sf,t})$ von $(\mathcal{T};I_S,\curlywedge,\lambda)$ verläuft analog, nur müssen wir überall die iterative Theorie $(\mathcal{T};I_S,\curlywedge,\lambda,\dagger)$ durch die Theorie $(\mathcal{T};I_S,\curlywedge,\lambda)$ ersetzen; dementsprechend fordern wir in (7) nur die Abgeschlossenheit gegenüber den Operationen $I_S,\curlywedge$ und λ in $\mathcal{T}$. Die Eigenschaft (6) bezieht sich natürlich auf die jeweilige Familie von Generatorenmengen aus der Behauptung des Satzes. Der Fall 2 des Beweises erübrigt sich hier, wie wir zeigen:

Sei wieder (8),(9) (s.S.35) angenommen, sei $\sigma=s\in S$ und es gelte nicht die Annahme (10),S.35 für den Berechnungsgraphen $B=(K,e,a,\gamma)$ vom Typ (s,τ) in (9). Es gibt also Knoten l von B mit

(16) $\quad (l,e_1)\in\nu^+$.

Sei $L := \{l\in K;(l,e_1)\in\nu^+\}$ die Menge derartiger Knoten und sei $M := \{k\in K;\ \exists\, l\in L : (l,k)\in\nu\}$ die Menge der Knoten aus $K\setminus L$, die direkte Nachfolger von Knoten aus L sind. e_1 ist in M. Wir ordnen die Elemente von M auf eine beliebige Weise zu einem c-tupel, $c := \mathrm{card}(M)$ $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_c)$ mit der ersten Komponente $\alpha_1=e_1$. Sei B' der Berechnungsgraph (K',e',a',γ') über Ω definiert durch

(17) $\quad K' := L\cup\{\alpha_1,\ldots,\alpha_c\}$

$e'_1 := e_1 = \alpha_1$

$a'_j := \alpha_j \quad (j\in[c])$

$\gamma'(l) := \gamma(l) \quad (l\in L\setminus\{\alpha_1,\ldots,\alpha_c\})$

$\gamma'(\alpha_j) := (r_j)$ falls $\gamma(\alpha_j)=(\omega,\ldots)$, $\omega\in\tilde{\Omega}^{r_j}_{\varsigma_j}$, $\varsigma_j\in S^*$ $(j\in[c])$.

B' ist also ein Berechnungsgraph vom Typ $(s,r_1\ldots r_c)$ und der (einzige) Eingang e'_1 von B' ist der erste Ausgang a'_1 von B'. Sei B'' der Berechnungsgraph (K'',e'',a'',γ'') über Ω vom Typ $(r_1\ldots r_c,\tau)$ definiert durch

(18) $K'':=K\setminus L$

$e''_i:=\alpha_i \quad (i\in[c])$

$a'':=a$

$\gamma'':=\gamma|_{K\setminus L}$.

Der erste Eingang e''_1 von B'' ist also der Eingang e_1 von B. Die Berechnungsgraphen B' und B'' sind so konstruiert, daß $\overline{B'}\overline{B''}=\overline{B}$. Wegen (16) ist $\mathrm{Grad}(B')\geq 1$ und deshalb $\mathrm{Grad}(B'')<\mathrm{Grad}(B')$. Sei jetzt φ ein Homomorphismus (2),(3) bzw. (4) mit der Eigenschaft (5) (s.S.34). Nach (5) ist $\varphi(\overline{B'})=\varphi(\overline{B_{1:[1]\to[c],s,r_1\ldots r_c}})=(1:[1]\to[c],s,r_1\ldots r_c)$ in $\mathcal{T}$ und deshalb $\varphi(\overline{B})=\varphi(\overline{B'}\overline{B''})=\varphi(\overline{B'})\varphi(\overline{B''})=c\varphi(\overline{B_{1:[1]\to[c],s,r_1\ldots r_c}})\varphi(\overline{B''})=\varphi(\overline{B_{1:[1]\to[c],s,r_1\ldots r_c}}\,\overline{B''})=\varphi(\overline{B''_1})$, wobei B''_1 der aus B'' durch Weglassen der Rolle des Knoten α_j von B'' als der j-te Eingang $(2\leq j\leq c)$ entstandene Berechnungsgraph ist, wie in (15),S.36, mit $\mathrm{Grad}(B''_1)=\mathrm{Grad}(B'')<\mathrm{Grad}(B)$. Das widerspricht aber der Annahme (9) $\varphi(\overline{B})=a=\mathrm{Min}\{\mathrm{Grad}(b);b$ aus $S^{sf}_\Omega(s,\tau)$ (bzw. $S^{sf,\ell_0 t}_\Omega(s,\tau)$, $S^{sf,t}_\Omega(s,\tau))$, $\varphi(b)=a\}$. Das heißt also, daß der Berechnungsgraph B die Eigenschaft (10),S.35 besitzt. Damit ist der Beweis des Satzes 4.1 beendet.

Die Zerlegungen von Berechnungsgraphen aus dem obigen Beweis kann man noch bei der folgenden Betrachtung verwenden:
Seien $b\in S_\Omega(\sigma,\tau)$, $(\sigma,\tau)\in S^+\times S^*$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$ und $B=(K,e,a,\gamma)$ ein Repräsentant von b, seien für jedes $i\in[n]$

(19) B_i der wie in (15),S.36 aus B konstruierte Berechnungsgraph vom Typ (s_i,τ) mit $\overline{B_i}=(i_n,s_i,\sigma)b$ in $\mathcal{Y}_\Omega$ und mit $\mathrm{Grad}(B_i)=\sigma\mathrm{Grad}(B)$

(20) C_i der wie in (14),S.36 aus B_i konstruierte Berechnungsgraph vom Typ $(s_i,\tau s_i)$ mit der Eigenschaft (10),S.35, mit $C_i^\dagger=B_i$ und mit $\mathrm{Grad}(C_i)=\mathrm{Grad}(B_i)$

(21) ist der (einzige) Eingang von C_i kein Ausgang von C_i, und ist $\omega\in\Omega\cup S^*\setminus\{0\}$ seine Marke, so sei D_i der wie in (11),S.35 aus C_i konstruierte Berechnungsgraph mit $\overline{C_i}=\omega\overline{D_i}$ in $\mathcal{Y}_\Omega$ und mit $\mathrm{Grad}(D_i)=\mathrm{Grad}(C_i)-1$.

Die Zerlegung (19),(20),(21) wollen wir jetzt wieder auf jedes Schema $\overline{D_i}$ in (21) anwenden, dessen Typ aus $S^+ \times S^*$ ist, und diesen Prozeß solange wiederholen, bis einmal die Voraussetzung in (21) für keinen der in (20) neu gewonnenen Berechnungsgraphen mehr erfüllt ist, oder bis keiner der in (21) neu gewonnenen Berechnungsgraphen von einem Typ aus $S^+ \times S^*$ ist. Es ist klar, daß dies nach endlich vielen Schritten vorkommt. Wir bezeichnen mit

$$\{B', B'', \ldots\}$$

die endliche Menge aller während dieses Prozeßes aus B neu gewonnenen Berechnungsgraphen. Ihre Schemata (Isomorphieklassen) sind Elemente aus I_S, $\Omega \cup S \times \{0\}$ oder $S_\Omega(\varepsilon, \varsigma)$, mit einem ς aus S.

Wir erinnern daran, daß jeder Homomorphismus φ von $(\mathcal{G}_\Omega; I_S, \mu, \lambda, \iota)$ in eine iterative Theorie nicht nur I_S sondern ganz $\mathfrak{S}_{S,P}$ (und insbesondere also $S \times \{0\} = \mathfrak{S}_{S,P|S \times \{\varepsilon\}}$) elementenweise festhält, da $(\mathfrak{S}_{S,P}; I_S, \mu, \lambda, \iota)$ eine Unteralgebra von $\mathcal{G}_\Omega$ ist und deshalb $\varphi|\mathfrak{S}_{S,P}: \mathfrak{S}_{S,P} \to \mathfrak{S}_{S,P}$ ein $\mathcal{IT}$-Morphismus ist (s.(58),S.31). Außerdem ist natürlich für jedes $\varsigma \in S^*$ $\varphi(S_\Omega(\varepsilon, \varsigma)) = \{(\emptyset : [0] \to [1(\varsigma)], \varepsilon, \varsigma)\} = T(\varepsilon, \varsigma)$ (s.(54),S.30).

Sei jetzt φ ein Homomorphismus (1) mit der Eigenschaft (5) aus dem Satz 4.1 (s.S.34). Bei der Zerlegung (19),(20),(21) erhalten wir für das Ausgangsschema $\overline{B} \in S_\Omega(\sigma, \tau)$

(22) $\varphi(\overline{B}) = \langle (\varphi(\overline{C_1}))^+, (\varphi(\overline{C_2}))^+, \ldots, (\varphi(\overline{C_n}))^+ \rangle$ in $\mathcal{T}$;

(23) ist $i \in [n]$ und ist der Eingang von C_i ein Ausgang von C_i, so ist $\varphi(\overline{C_i}) = (i_{p+1}, s_i, \tau s_i) \in I_S(s_i, \tau s_i)$ in $\mathcal{T}$;

(24) ist $i \in [n]$ und ist der Eingang von C_i kein Ausgang von C_i, so ist $\varphi(\overline{C_i}) = \varphi(\omega)\varphi(\overline{D_i})$.

Bei Fortsetzung der Zerlegung des gegebenen Schemas $b = \overline{B}$ folgt daraus, daß sein Abbild $\varphi(b)$ unter φ aus den Elementen $\varphi(B'), \varphi(B''), \ldots$ aus $\mathcal{T}$ durch eine zusammengesetzte Operation in der Albebra $(\mathcal{T}; I_S, \mu, \lambda, \iota)$ entsteht, die allein durch unsere Zerlegung des Schemas b bestimmt ist, also unabhängig von φ. Ist jetzt φ' ein zweiter Homomorphismus (1) mit der Eigenschaft (5) in dieselbe iterative Theorie $\mathcal{T}$ wie φ und gilt

$$\varphi'(\omega) = \varphi(\omega) \quad (\omega \in \Omega),$$

so können wir aus der obigen Betrachtung folgern, daß

$$\varphi'(b) = \varphi(b).$$

Für $b \in S_\Omega(\varepsilon, \tau)$, $\tau \in S^*$, gilt es selbstverständlich auch.

Sei b aus $S_\Omega^{sf}(\sigma, \tau)$, $S_\Omega^{sf, \Omega \cup t}(\sigma, \tau)$ bzw. $S_\Omega^{sf, t}(\sigma, \tau)$, $(\sigma, \tau) \in S^+ \times S^*$, $\sigma = s_1 \ldots s_n$, $\tau = t_1 \ldots t_p$, sei $B = (K, e, a, \gamma)$ ein Repräsentant von b, und seien für jedes $i \in [n]$

(25) B_i wie in (19),S.38,

(26) $C_i'':=B_i$ falls der (einzige) Eingang von B_i die Eigenschaft (10),S.35 besitzt bzw.
C_i' und C_i'' die wie in (17),S.37 und (18),S.38 aus B_i konstruierte Berechnungsgraphen, falls für den Eingang von B_i (10) nicht gilt, wobei der Eingang von C_i' ein Ausgang von C_i' ist und C_i'' die Eigenschaft (10) besitzt;
es ist $Grad(C_i'')\leq Grad(B_i)$;

(27) D_i wie in (21),S.38, für C_i''.

Ist φ ein Homomorphismus (2),(3) bzw. (4) mit der Eigenschaft (5) aus dem Satz 4.1 (S.34), so gilt:

(28) $\varphi(b)= \varphi(\overline{C_1''}),\varphi(\overline{C_2''}),\ldots,\varphi(\overline{C_n''})$ in $\mathcal{T}$;

(29) ist $i\in[n]$ und ist der Eingang von C_i'' ein Ausgang von C_i'', so ist $\varphi(\overline{C_i''})=(i_p,s_i,\tau)\in I_S(s_i,\tau)$ in $\mathcal{T}$;

(30) ist $i\in[n]$ und ist der Eingang von C_i'' kein Ausgang von C_i'', so ist $\varphi(\overline{C_i''})=\varphi(\omega)\varphi(\overline{D_i})$.

Analog zu oben folgt daraus, daß der Homomorphismus φ durch seine Werte auf den Elementen aus $\Omega\cup S\times\{0\}$, Ω bzw. $\Omega\setminus\Omega_0$ eindeutig bestimmt ist.

4.2. Satz.
Jeder Homomorphismus (1),(2),(3) bzw. (4) mit der Eigenschaft (5) aus dem Satz 4.1, S.34 ist durch seine Werte auf den Elementen aus Ω, $\Omega\cup S\times\{0\}$, Ω bzw. $\Omega\setminus\Omega_0$, der Reihe nach, eindeutig bestimmt.

§5. Interpretationen

Unter einer Interpretation von Schemata (z.B. Programmschemata) versteht man meistens eine Abbildung, die jedem Schema ein Element aus einer anderen Menge zuordnet (z.B. ein Programm), und man nennt dieses Element die Bedeutung des Schemas. Zwei derartige Abbildungen haben wir bereits in §§2, 3 untersucht, die komponentenweisen Abbildungen ν_I und $\nu_I^{(2)}$. Es zeigte sich dabei, daß

man Schemata und ihre freien äußeren Verhalten mit einer ähnlichen algebraischen Struktur versehen kann. Vor allem ließen sich sowohl Schemata über einer Zeichenmenge $\Omega = \bigcup_{s\in S,\tau\in S^*} \Omega_\tau^s$ als auch ihre freien äußeren Verhalten als Mengenfamilien über dem Indexbereich S^{*2} darstellen, und diese Struktur wurde von ν_f und $\nu_f^{(2)}$ respektiert. Wir wollen in dieser Arbeit außer Schemata auch andere Objekte interpretieren, z.B. Programme. Es werden aber immer Elemente aus Mengen gewisser Mengenfamilien über dem Indexbereich S^{*2} sein. Die Interpretationen werden komponentenweise Abbildungen derartiger Mengenfamilien sein. Wir bezeichnen im Folgenden mit

$$\mathfrak{M}$$

die Kategorie von Mengen und Abbildungen mit der üblichen Komposition fg (f gefolgt von g) von Morphismen. S sei wie früher eine nichtleere Menge. Mit

$$\mathfrak{M}(S^{*2})$$

bezeichnen wir die Kategorie mit Mengenfamilien $(M(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ als Objekten, die für Objekte $M=(M(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$, $N=(N(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ alle komponentenweisen Abbildungen von M nach N als die Morphismenmenge $\mathfrak{M}(S^{*2})(M,N)$ hat, mit ihrer komponentenweisen Komposition. Die Morphismen $f=(f_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ aus $\mathfrak{M}(S^{*2})$ nennen wir $\mathfrak{M}(S^{*2})$-Morphismen.

Definition.
Sei $M=(M(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ ein Objekt aus $\mathfrak{M}(S^{*2})$. Eine Interpretation über M ist ein $\mathfrak{M}(S^{*2})$-Morphismus mit der Quelle M.

Wenn die Elemente aus $\bigcup_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}} M(\sigma,\tau)$ bereits einen Namen haben (z.B. Schemata), so werden wir auch von einer Interpretation dieser Elemente (z.B. Interpretation von Schemata) sprechen. Das Abbild eines solchen Elements heißt seine Bedeutung unter der Interpretation. In dieser Terminologie können wir die komponentenweisen Abbildungen ν_f, $\nu_f^{(2)}$ aus §§2,3 als Interpretationen bezeichnen:

Definition.
Die ν_f-Interpretation über $\mathfrak{S}_\Omega$ ist die Interpretation

(1) $\quad \nu_f : \mathfrak{S}_\Omega \to [\widehat{\Sigma_\pi}] : b \mapsto \nu_f(b)$.

Die $\nu_f^{(2)}$-Interpretation über $\mathfrak{S}_\Omega$ ist die Interpretation

$$\nu_f^{(2)} : \mathfrak{S}_\Omega \to (\!|\widehat{\Sigma_\pi}|\!) : b \mapsto \nu_f^{(2)}(b).$$

Analog für $\mathfrak{S}_\Omega^{sf}$, $\mathfrak{S}_\Omega^{sf,\Omega\text{-}t}$ und $\mathfrak{S}_\Omega^{sf,t}$.

Nach der Definition des freien äußeren Verhaltens von Schemata (s.(32),S.10, (26)-(30),S.9 , (21),S.8) und der Elemente $(j:[1]\to[l(\tau)]\,,s,\tau)\in I_S(s,\tau)$ in $[\widehat{\varepsilon_{\mathfrak{A}}}](s,\tau)$ bzw. $(\widehat{\varepsilon_{\mathfrak{A}}})(s,\tau)$ $(j\in[l(\tau),$ $(s,\tau)\in S\times S^*)$ (s.(2),S.11) besitzen alle acht Interpretationen die Eigenschaft (5) aus dem Satz 4.1, S.34. Aus den Sätzen 3.13, S.29 und 4.1 folgt (vgl. Satz 3.14 und (67),S.33):

5.1. Satz.
Die iterative Theorie $\nu_f(\mathcal{Y}_{\mathfrak{A}})$ bzw. $\nu_f^{(2)}(\mathcal{Y}_{\mathfrak{A}})$ ist generiert durch $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_o$. Die Theorie $\nu_f(\mathcal{Y}_{\mathfrak{A}}^{sf})$ ist generiert durch $\mathfrak{A}\cup S\times\{0\}$. Die Theorie $\nu_f^{(2)}(\mathcal{Y}_{\mathfrak{A}}^{sf})$ ist generiert durch $(\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_o)\cup S\times\{0\}$. Die Theorie $\nu_f(\mathcal{Y}_{\mathfrak{A}}^{sf,\mathfrak{A}_o t})$ bzw. $\nu_f^{(2)}(\mathcal{Y}_{\mathfrak{A}}^{sf,\mathfrak{A}_o t})$ ist generiert durch $\mathfrak{A}$ bzw. $(\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_o)\cup$ $\cup S\times\{0\}$. Die Theorie $\nu_f^{(2)}(\mathcal{Y}_{\mathfrak{A}}^{sf,t})$ ist generiert durch $\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_o$.

5.1. Terme-Interpretation der Schemata aus $\mathcal{Y}_{\mathfrak{A}}^{sf,\mathfrak{A}_o t}$

Sei wie früher $\mathfrak{A}=\bigcup_{s\in S,\tau\in S^*}\mathfrak{A}_\tau^s$ eine Zeichenmenge. Wir konstruieren aus $\mathfrak{A}$ eine neue Zeichenmenge $\bar{\mathfrak{A}}$ mit dem gleichen Indexbereich S durch

$$\bar{\mathfrak{A}}_\varepsilon^s:=\mathfrak{A}_\varepsilon^s\cup\{(n,s);n\in N\}\quad(s\in S)$$

$$\bar{\mathfrak{A}}_\tau^s:=\mathfrak{A}_\tau^s\qquad(s\in S,\tau\in S^+),$$

wobei wir o.E.d.A. $\mathfrak{A}\cap(N\times S)=\emptyset$ annehmen.

Definition.
Sei $\tau=t_1\dots t_p\in S$. Ein Term über $\mathfrak{A}$ vom Argumenttyp τ ist ein Element der kleinsten Menge $Z\subseteq\bar{\mathfrak{A}}^*$ ($\bar{\mathfrak{A}}^*$ ist das freie Monoid aller Wörter über $\bar{\mathfrak{A}}$) mit den Eigenschaften

(2) $(i,t_i)\in Z\quad(i\in[p])$

(3) $\mathfrak{A}_o\subseteq Z$

(4) sind $z_1=\omega_1\dots$, $z_2=\omega_2\dots$, $\dots$, $z_m=\omega_m\dots$ in Z mit $\omega_j\in\bar{\mathfrak{A}}_{\sigma_j}^{r_j}$, $r_j\in S$, $\sigma_j\in S^*$, $(j\in[m])$, $m\geq 1$, und ist $\omega\in\bar{\mathfrak{A}}_{r_1r_2\dots r_m}^s$, $s\in S$, so ist $\omega z_1z_2\dots z_m$ in Z.

Ist $z=\omega z_1\dots z_m$ ein Term vom Argumenttyp $\tau=t_1\dots t_p$ über $\mathfrak{A}$ mit einem $\omega\in\bar{\mathfrak{A}}_\varsigma^s$, $s\in S$, $\varsigma\in S^*$, so heißt s der Ergebnistyp von z und das Paar (s,τ) ein Typ von z.

Bemerkung. Die Menge aller Terme über Ω vom Argumenttyp τ entspricht der Trägermengenfamilie der freien Wortalgebra vom Typ Ω mit den Generatoren (i,t_i) $(i\in[p])$ im Falle heterogener Algebren (vgl. dazu Birkhoff u. Lipson (1970), S.126, Reusch, B., Zur Realisierung von Automaten über Algebren, GMD-Bericht 38, Bonn 1971, S.25).

Wir bezeichnen für jedes $(s,\tau)\in S\times S^*$ mit $T_\Omega(s,\tau)$ die Menge aller Paare (z,τ) mit einem Term z über Ω vom Typ (s,τ) als erste Komponente, setzen für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$

$$T_\Omega(\sigma,\tau):=T_\Omega(s_1,\tau)\times\ldots\times T_\Omega(s_n,\tau) \quad \text{für } \sigma\neq\varepsilon \text{ bzw.}$$

$$T_\Omega(\varepsilon,\tau):=\{(\emptyset:[0]\to[1(\tau)],\varepsilon,\tau)\},$$

und bezeichnen

$$\mathcal{T}_\Omega:=(T_\Omega(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}.$$

Seien $r\in S$, $\sigma=s_1\ldots s_n\in S^*$, $\tau\in S^*$, und seien $(y,\sigma)\in T_\Omega(r,\sigma)$ und $(z_i,\tau)\in T_\Omega(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$. Wir bezeichnen mit $y(z_1,\ldots,z_n)$ den Term über Ω vom Argumenttyp τ, der durch die Einsetzung des Termes z_i für jedes Auftreten des Zeichens (i,t_i) im Wort y entsteht $(i\in[n])$; es gilt also $(y(z_1,\ldots,z_n),\tau)\in T_\Omega(r,\tau)$.

Das Produkt in $\mathcal{T}_\Omega$ ist definiert für $\varsigma\in S^m$, $\sigma=s_1\ldots s_n\in S^n$, $\tau\in S^*$, $m,n\geq 0$, und für $a=((y_1,\sigma),(y_2,\sigma),\ldots,(y_m,\sigma))\in T_\Omega(\varsigma,\sigma)$, $b=((z_1,\tau),(z_2,\tau),\ldots,(z_n,\tau))\in T_\Omega(\sigma,\tau)$ durch

$$ab:=((y_1(z_1,z_2,\ldots,z_n),\tau),(y_2(z_1,z_2,\ldots,z_n),\tau),\ldots,$$
$$(y_m(z_1,z_2,\ldots,z_n),\tau))\in T_\Omega(\varsigma,\tau).$$

Mit $p_{\varsigma,\sigma,\tau}$ bezeichnen wir die dadurch definierte heterogene Operation über $\mathcal{T}_\Omega$ und setzen $p:=(p_{\varsigma,\sigma,\tau})_{(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}}$.

Das Tupeln in $\mathcal{T}_\Omega$ ist definiert für (σ,τ) aus S^{*2}, $\sigma=s_1\ldots s_n$ und für $(z_i,\tau)\in T_\Omega(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$ durch

$$\langle(z_1,\tau),(z_2,\tau),\ldots,(z_n,\tau)\rangle:=((z_1,\tau),(z_2,\tau),\ldots,(z_n,\tau))\in T_\Omega(\sigma,\tau).$$

Wir bezeichnen mit $t_{\sigma,\tau}$ die dadurch definierte heterogene Operation über $\mathcal{T}_\Omega$ und setzen $t:=(t_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$.

Sei

(5) $(f:[n]\to[p],\sigma,\tau)\in G_{S,F}(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$ aus S^*.

Wir erinnern daran, daß $\sigma=t_{f(1)}t_{f(2)}\ldots t_{f(n)}$ ist (s.(13),S.14). Die Zuordnung, die jedem Element (5) aus $G_{S,F}(\sigma,\tau)$ das Element

(6) $(((f(1),t_{f(1)}),\tau),((f(2),t_{f(2)}),\tau),\ldots,((f(n),t_{f(n)}),\tau))\in$

$T(\ ,\ )$ zuordnet,

ist offensichtlich eine Injektion $G_{S,F}(\sigma,\tau)\to T_\Omega(\sigma,\tau)$. Wir betten auf diese Art $G_{S,F}$ in $\mathcal{T}_\Omega$ komponentenweise ein. Insbesondere gilt dann $I_S\subseteq\mathcal{T}_{\Omega|S\times S^+}$. Es ist nicht schwer einzusehen, daß $(\mathcal{T}_\Omega;I_S,\wedge,\mathcal{A})$ eine Theorie über dem Indexbereich S ist. Wir betten noch mittels der Injektion

$$\omega\mapsto(\omega,\varepsilon)\in T_\Omega(s,\varepsilon)\ (\omega\in\Omega^S_\varepsilon,\ s\in S)\quad\text{bzw.}$$

$$\omega\mapsto(\omega(1,t_1)(2,t_2)\ldots(p,t_p),\tau)\in T_\Omega(s,\tau)\ (\omega\in\Omega^S_\tau,\ s\in S,\ \tau=t_1\ldots t_p\in S^+)$$

Ω in $\mathcal{T}_\Omega$ komponentenweise ein.

Sei jetzt $b\in S^{sf,\Omega_o t}_\Omega(\sigma,\tau)$ ein schleifenfreies Ω_o-totales Schema über Ω vom Typ (σ,τ), $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, und sei $B=(K,e,a,\gamma)$ ein Repräsentant von b. Wir erinnern an die Definition eines Weges α im Berechnungsgraphen B und an die Länge $l(\alpha)$ von α (s.(12),(14),S.6). Wir definieren für jeden Knoten k von B seine Höhe h(k) als das Maximum der Längen aller Wege in B von k zu Nullknoten und Ausgängen von B. Es ist klar, daß für jeden Knoten k von B mit den direkten Nachfolgern $k_1,\ldots,k_m$, $m\geq 1$, $h(k)=\mathrm{Max}\{h(k_1),\ldots,h(k_m)\}+1$ gilt.

Wir ordnen jedem Knoten k von B rekursiv nach der Höhe von k ein Paar (z,τ) mit einem Term z über Ω vom Argumenttyp τ als sein Terme-Verhalten $v_{\mathcal{T}}(k)$ zu:

(7) $v_{\mathcal{T}}(a_j):=((j,t_j),\tau)$ $(j\in[p])$;

(8) sind $k\in K$ und $\gamma(k)=(\omega)$, $\omega\in\Omega^S_\varepsilon$, $s\in S$, so sei $v_{\mathcal{T}}(k):=(\omega,\tau)$;

(9) sind $k\in K$ und $\gamma(k)=(\omega,k_1,\ldots,k_m)$, $\omega\in\Omega^S_{r_1\ldots r_m}$, $s\in S$, $r_1\ldots r_m\in S^+$, und sind $v_{\mathcal{T}}(k_1)=(z_1,\tau),\ldots,v_{\mathcal{T}}(k_m)=(z_m,\tau)$ die Terme-Verhalten von $k_1,\ldots,k_m$, so sei $v_{\mathcal{T}}(k):=(\omega z_1\ldots z_m,\tau)$.

Wegen der Eigenschaft (8)(a),S.3 des Berechnungsgraphen B ist in (9) $\omega z_1\ldots z_m$ wohl definiert und es ist offensichtlich ein Term vom Typ (s,τ); $v_{\mathcal{T}}(k)$ ist dann in $T_\Omega(s,\tau)$.

Bemerkung. Mit Hilfe des Terme-Verhaltens $v_{\mathcal{T}}(k)$ der Knoten eines Berechnungsgraphen aus $\varphi^{sf,\Omega_o t}_\Omega$ erhalten wir auch die von Strassen (1973) eingeführten Ω-Mengen allerdings verallgemeinert auf den heterogenen Fall. Es gilt die

Behauptung. Es sei $B=(K,e,a,\gamma)$ ein Berechnungsgraph über Ω. Dann ist

$$M:=\{v_{\mathcal{T}}(k);\ k\in K\}$$

eine $\bar{\Omega}$-Menge im Sinne von Strassen im heterogenen Fall ($\bar{\Omega}$ s.S.42)

Beweis: Nach Strassen (1973),S.67 ist die Implikation

$$((\omega z_1 z_2 \ldots z_m,\tau)\in M,\ \omega\in\Omega^s_{r_1 r_2 \ldots r_m},\ (z_i,\tau)\in T_\Omega(r_i,\tau)\ (i\in[m]),\quad s\in S,\ \tau\in S^*,\ r_1\ldots r_m\in S^+)$$

$$\Rightarrow\ (z_i,\tau)\in M\ (i\in[m])$$

zu zeigen. Ist aber oben $(\omega z_1 z_2 \ldots z_m,\tau)\in M$, so existieren nach der Eigenschaft (9) Knoten $k,k_1,k_2,\ldots,k_m$ aus K mit $\gamma(k)=(\omega, k_1,k_2,\ldots,k_m)$ und $v_{\mathcal{T}}(k_i)=(z_i,\tau)$ $(i\in[m])$, also gilt $(z_i,\tau)\in M$ $(i\in[m])$.

Das äußere (Terme-)Verhalten $v_{\mathcal{T}}(B)$ des Berechnungsgraphen B ist für $\sigma\neq\varepsilon$ das n-tupel

(10) $v_{\mathcal{T}}(B):=(v_{\mathcal{T}}(e_1),v_{\mathcal{T}}(e_2),\ldots,v_{\mathcal{T}}(e_n))\in T_\Omega(\sigma,\tau)$

der Terme-Verhalten seiner Eingänge, für $\sigma=\varepsilon$ das (einzige) Element

$$v_{\mathcal{T}}(B):=(\emptyset:[0]\to[p],\varepsilon,\tau) \text{ aus } T_\Omega(\varepsilon,\tau).$$

Offensichtlich haben zwei isomorphe Repräsentanten von b ein und dasselbe äußere Verhalten. Wir können daher definieren:
Das äußere (Terme-)Verhalten $v_{\mathcal{T}}(b)$ des Schemas b ist

$$v_{\mathcal{T}}(b):=v_{\mathcal{T}}(B).$$

Wir möchten noch Folgendes anmerken: Ist oben $\sigma=s$ aus S und ist der (einzige) Eingang e_1 von B ein Ausgang a_j von B, $j\in[p]$, so ist nach (10),(9) und nach (6),S.44

(11) $v_{\mathcal{T}}(b)=((j,t_j),\tau)=(j:[1]\to[p],\ t_j,\tau)\in I_S(t_j,\tau)$ in $\mathcal{T}_\Omega$ (vgl.(5), S.34).

Ist $(f:[n]\to[p],\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_{S,F}(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, und ist $B_{f,\sigma,\tau}$ der zugehörige Berechnungsgraph (s.(16),S.15), so ist offensichtlich $v_{\mathcal{T}}(B_{f,\sigma,\tau})=(((f(1),t_1),\tau),\ldots,((f(n),t_n),\tau))=(f:[n]\to[p],\sigma,\tau)$ in $\mathcal{T}_\Omega$.

Ist $\omega\in\Omega^s_\varepsilon$, $s\in S$, bzw. $\omega\in\Omega^s_\tau$, $s\in S$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^+$, und ist B_ω der zugehörige Berechnungsgraph (s.(4),S.12), so ist offensichtlich $v_{\mathcal{T}}(B_\omega)=(\omega,\varepsilon)\in T_\Omega(s,\varepsilon)$ bzw. $v_{\mathcal{T}}(B_\omega)=(\omega(1,t_1)(2,t_2)\ldots(p,t_p),\tau)\in T_\Omega(s,\tau)$.

Aus der Definition des Produkts zweier Berechnungsgraphen B vom Typ (ς,σ) und C vom Typ (σ,τ) (mit disjunkten Knotenmengen) über Ω, $\varsigma,\sigma,\tau\in S^*$, (s.S.17) und aus der Definition des Produkts in $\mathcal{T}_\Omega$ sieht man sofort, daß

$$v_{\mathcal{T}}(BC)=v_{\mathcal{T}}(B)v_{\mathcal{T}}(C) \text{ in } \mathcal{T}_\Omega.$$

Ebenso einfach ergibt sich aus der Definition des Tupelns für

Berechnungsgraphen B_i vom Typ (s_i,τ) (mit paarweise disjunkten Knotenmengen) über Ω $(i\in[n])$, $s_1\ldots s_n,\tau\in S^*$:

$$v_{\mathcal{T}}\langle B_1,\ldots,B_n\rangle=\langle v_{\mathcal{T}}(B_1),\ldots,v_{\mathcal{T}}(B_n)\rangle \quad \text{in } \mathcal{T}_\Omega.$$

Definition.
Die Terme-Interpretation über $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\mathcal{A}_o t}$ ist die Interpretation

$$v_{\mathcal{T}}:\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\mathcal{A}_o t}\to\mathcal{T}_\Omega : b\mapsto v_{\mathcal{T}}(b).$$

5.2. Satz.
$v_{\mathcal{T}}$ ist ein Homomorphismus $(\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\mathcal{A}_o t};I_S,\mathcal{F},\mathcal{A})\to(\mathcal{T}_\Omega;I_S,\mathcal{F},\mathcal{A})$, der Ω elementenweise festhält.

Aus Satz 5.2 und (11),S.45 und aus Satz 4.1,S.34 folgt:

5.3. Korollar.
$v_{\mathcal{T}}(\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\mathcal{A}_o t})$ ist in $(\mathcal{T}_\Omega;I_S,\mathcal{F},\mathcal{A})$ durch Ω generiert.

Bemerkung. Beim Anblick der Definition der Menge aller Terme über Ω und der Definitionen des Produkts, des Tupelns und der Elemente $(i_p,s,\tau)\in I_S(s,\tau)$ $((s,\tau)\in S\times S^+,\ \tau=t_1\ldots t_p)$ in $\mathcal{T}_\Omega$ sieht man, daß ganz $\mathcal{T}_\Omega$ in $(\mathcal{T}_\Omega;I_S,\mathcal{F},\mathcal{A})$ durch Ω generiert ist. Danach gibt es zu jeder Theorie (über dem gleichen Indexbereich S wie $\mathcal{T}_\Omega$) $\mathcal{T}'$ und zu jeder komponentenweisen Abbildung $f:\Omega\to\mathcal{T}'$ höchstens einen $\mathcal{TH}$-Morphismus $\varphi:\mathcal{T}_\Omega\to\mathcal{T}'$, der verlängert. Durch Induktion z.B. nach der Länge der Terme über Ω (es sind Wörter aus $\bar{\Omega}^*$) läßt sich die Existenz eines solchen $\mathcal{TH}$-Morphismus φ leicht zeigen. Die Theorie $\mathcal{T}_\Omega$ ist danach die freie heterogene Theorie über dem Indexbereich S generiert durch Ω, und wir bezeichnen sie mit

(12) $\quad \mathcal{G}_{S,F}[\Omega]:=(\mathcal{T}_\Omega;I_S,\mathcal{F},\mathcal{A})$.

Nach Satz 5.1,S.42 ist die Theorie $v_f(\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\mathcal{A}_o t})$ durch Ω generiert. Es besteht also Isomorphismus

$$v_f(\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\mathcal{A}_o t})\cong\mathcal{G}_{S,F}[\Omega]=\mathcal{T}_\Omega.$$

Für schleifenfreie $\mathcal{A}_o$-totale Schemata über Ω ist also das äußere Terme-Verhalten nur eine andere Präsentierung des freien äußeren Verhaltens.

5.2. Programm-Interpretation der Schemata aus $\mathcal{Y}_{\Omega}^{sf,\Omega_o t}$
(Fall algebraische Berechnungen)

Sei $\Omega=\bigcup_{s\in S,\tau\in S^*}\Omega_\tau^s$ eine Zeichenmenge wie oben. Sei

(13) $X=(X_s)_{s\in S}$

eine Mengenfamilie und sei

(14) $\pi=(\pi_{s,\tau})_{(s,\tau)\in S\times S^*}$

eine Familie von Abbildungen mit der Eigenschaft, daß für $(s,\tau)\in S\times S^*$, $\tau=t_1\ldots t_p$ die Abbildung $\pi_{s,\tau}$ jedem Zeichen $\omega\in\Omega_\tau^s$ eine (heterogene) Operation über X

(15) $\pi_{s,\tau}(\omega):X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}\to X_s$

zuordnet (für $\tau=\varepsilon$ ist es eine nullstellige Operation $\pi_{s,\varepsilon}(\omega):\{\emptyset\}\to X_s$). Wir bezeichnen für jedes $(s,\tau)\in S\times S^*$

$\Gamma_\tau^s:=\{(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega));\ \omega\in\Omega_\tau^s\}$ und setzen

$$\Gamma:=\bigcup_{(s,\tau)\in S\times S^*}\Gamma_\tau^s\ .$$

Die Menge Γ betrachten wir als eine neue Zeichenmenge. Sei $\tilde{\Gamma}=\Gamma_{S\cup S\times\{0\}}$ die Zeichenmenge, die aus Γ durch Adjunktion von $S\cup S\times\{0\}$ entsteht (vgl.(3),S.2).

Seien jetzt $b\in S_\Omega^{sf,\Omega_o t}(\sigma,\tau)$ ein schleifenfreies Ω_o-totales Schema über Ω vom Typ (σ,τ), $\sigma,\tau\in S^*$, und $B=(K,e,a,\gamma)$ ein Repräsentant von b. Wir ordnen dem Berechnungsgraphen B über Ω vom Typ (σ,τ) den Berechnungsgraphen $p(B)=(K,e,a,\gamma')$ über Γ vom gleichen Typ zu, mit der Abbildung γ' definiert durch

$\gamma'(a_j):=\gamma(a_j)=(t_j)\quad(j\in[p])$

$\gamma'(k):=((\omega,\pi_{s,\tau}(\omega)),k_1,\ldots,k_m)$ falls $\gamma(k)=(\omega,k_1,\ldots,k_m)$, $\omega\in\Omega_\tau^s$, $(s,\tau)\in S\times S^*$

sonst für $k\in K$.

Es ist klar, daß für zwei isomorphe Repräsentanten B,B' von b die ihnen zugeordneten Berechnungsgraphen $p(B),p(B')$ über Γ isomorph sind.

Definition.
Die Programm-Interpretation über $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega_o t}$ induziert durch π ist

die Interpretation

$$\mu : \mathcal{Y}_{\Omega}^{sf,\Omega\circ t} \to \mathcal{Y}_{\Gamma}^{sf,\Gamma\circ t} : \overline{B \mapsto p(B)}.$$

Die Bedeutung eines Schemas b über Ω unter der Interpretation μ heißt das Programm von b.

Es ist klar, daß die Interpretation μ eine komponentenweise Bijektion von $\mathcal{Y}_{\Omega}^{sf,\Omega\circ t}$ auf $\mathcal{Y}_{\Gamma}^{sf,\Gamma\circ t}$ ist, vielmehr, daß μ ein Isomorphismus der Algebren $(\mathcal{Y}_{\Omega}^{sf,\Omega\circ t}; I_S, \iota, \lambda)$ und $(\mathcal{Y}_{\Gamma}^{sf,\Gamma\circ t}; I_S, \iota, \lambda)$ ist.

5.3. Berechnung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{Y}_{\Gamma}^{sf,\Gamma\circ t}$ (Fall algebraische Berechnungen)

Sei $\mathcal{Y}_{\Gamma}^{sf,\Gamma\circ t}$ die Mengenfamilie aller Programme über Γ wie im letzten Abschnitt. Wir werden uns natürlich nur um ganz spezielle Interpretationen von Programmen aus $\mathcal{Y}_{\Gamma}^{sf,\Gamma\circ t}$ interessieren, wo die in Programmen bereits vorhandenen Operationen $\pi_{s,\tau}(\omega): X_{t_1} \times \ldots \times X_{t_p} \to X_s$ eine entscheidende Rolle spielen.

In der Einleitung haben wir angedeutet, daß wir als einen Berechnungslauf einen gerichteten geordneten Graphen betrachten wollen, dessen Knoten mit Elementen x aus der Trägermenge der verwendeten Algebra markiert sind; diese Marken sind die „Zwischenergebnisse" des Berechnungslaufes. Im heterogenen Fall müssen wir jeden Knoten mit einem Paar (x,s), $x \in X_s$, markieren, um auch die Trägermenge des Zwischenergebnisses x (seinen „Typ") zu charakterisieren, denn die Mengen X_s ($s \in S$) müssen nicht disjunkt sein. Für Zwecke dieses Abschnitts definieren wir:

Definition.
Sei $X=(X_s)_{s\in S}$ eine Mengenfamilie. Ein Graph G über X ist bestimmt durch

(16) eine endliche Menge K; die Elemente aus K heißen die Knoten von G;

(17) eine Abbildung $e:[n] \to K$, $n \in \mathbb{N}_0$; das Bild $e_i := e(i) \in K$ von $i \in [n]$ heißt der i-te Ergebnisknoten von G;

(18) eine injektive Abbildung $a:[p] \to K$, $p \in \mathbb{N}_0$; das Bild $a_j := a(j) \in K$ von $j \in [p]$ heißt der j-te Argumentknoten von G;

(19) eine Abbildung $\gamma : K \to (\bigcup_{s\in S} (X_s \times \{s\})) \times (\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} K^m)$, die jedem Knoten

$k\in K$ ein Paar (x,s), $x\in X_s$, $s\in S$, zuordnet, genannt die Marke von k, zusammen mit einem m-tupel $(k_1,\dots,k_m)$, $m\geq 0$, von Knoten, genannt die direkten Nachfolger von k, mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Die transitive Hülle $\nu^+=\nu\cup\nu^2\cup\nu^3\cup\dots$ der direkt-Nachfolger-Relation $\nu\subseteq K^2$ definiert durch

$(\gamma(k)=((x,s),k_1,\dots,k_m) \Leftrightarrow: ((k,k_i)\in\nu \ (i\in[m]))$, $x\in X_s, s\in S, m\geq 0$,

ist antireflexiv, d.h. $(k,k)\notin\nu^+$ $(k\in K)$;

(b) $(a_j,k)\notin\nu$ $(j\in[p], k\in K)$.

Ist $\gamma(e_i)=((y_i,s_i),\dots)$, $y_i\in X_{s_i}$, $s_i\in S$, $(i\in[n])$, so heißt das Wort $\sigma:=s_1\dots s_n\in S^*$ der Ergebnistyp von G. Ist $\gamma(a_j)=((x_j,t_j)$, $x_j\in X_{t_j}$, $t_j\in S$, $(j\in[p])$, so heißt das p-tupel

$$v_X^{(2)}:=(x_1,\dots,x_p)\in X_{t_1}\times\dots\times X_{t_p}$$

das Argument von G und das Wort $\tau:=t_1\dots t_p\in S^*$ der Argumenttyp von G. Das Paar

$$(20)\quad v_X=(v_X^{(1)},v_X^{(2)}):=((y_1,\dots,y_n),(x_1,\dots,x_p))$$

nennen wir das äußere Verhalten von G, das Paar (σ,τ) heißt der Typ von G.

Ein Graph $G=(K,e,a,\gamma)$ über X ist also ein endlicher schleifenfreier (nach (19)(a)) gerichteter geordneter Graph, dessen Knoten mit Paaren (x,s), $x\in X_s$, $s\in S$, markiert sind, wobei wir im Vergleich zu den Berechnungsgraphen in §2 diese Marken als ohne Typ betrachten. Die Abbildungen e,a zeichnen wie früher gewisse Knoten aus, diesmal Ergebnisknoten und Argumentknoten genannt. Die Argumentknoten haben keine direkte Nachfolger in G (nach (19)(b)).

Seien $G=(K,e,a,\gamma)$, $G'=(K',e',a',\gamma')$ zwei Graphen über X vom gleichen Typ $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\dots s_n$, $\tau=t_1\dots t_p$. G und G' heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi:K\to K'$ gibt mit den Eigenschaften

$$(21)\quad \varphi(e_i)=e'_i \quad (i\in[n])$$

$$(22)\quad \varphi(a_j)=a'_j \quad (j\in[p])$$

$$(23)\quad (\gamma(k)=((x,s),k_1,\dots,k_m) \Leftrightarrow \gamma'(\varphi(k))=((x,s),\varphi(k_1),\dots,\varphi(k_m))),$$

$x\in X_s$, $s\in S$, $m\geq 0$ $(k\in K)$.

Mit $\overline{G}$ bezeichnen wir die Isomorphieklasse des Graphen G über X. Die mengentheoretische Betrachtung S.5 oben gilt auch hier.

Jede Isomorphieklasse von Graphen über X vom Typ $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$ nennen wir ein Schema über X vom Typ (σ,τ). Die Begriffe Argument, Ergebnis und äußeres Verhalten übertragen wir auf Schemata über X von ihren Repräsentanten. Wir bezeichnen für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$ mit $G_X(\sigma,\tau)$ die Menge aller Schemata vom Typ (σ,τ) über X, mit $\mathfrak{P}(G_X(\sigma,\tau))$ ihre Potenzmenge, betten mittels $a\mapsto\{a\}$ $G_X(\sigma,\tau)$ in $\mathfrak{P}(G_X(\sigma,\tau))$ ein, und setzen

(24) $\widehat{G_X}:=(\mathfrak{P}(G_X(\sigma,\tau)))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$.

Sei $(f:[n]\to[p],\sigma,\tau)\in\mathfrak{G}_{S,F}(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$. Es ist also $\sigma=t_{f(1)}t_{f(2)}\cdots t_{f(n)}$ (s.(13),S.14). Für jedes $(x_1,\ldots,x_p)\in X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}$ bezeichnen wir mit

(21) $G_{f,\sigma,\tau,x_1\ldots x_p}$

den Graphen (K,e,a,γ) über X vom Typ (σ,τ) definiert durch $K:=[p]$, $e_i:=f(i)$ $(i\in[n])$, $a_j:=j$ $(j\in[p])$, $\gamma(j):=(x_j,t_j)$ $(j\in[p])$ (vgl.(16), S.15). Mit (f^*,σ,τ) bezeichnen wir das Abbild von (f,σ,τ) unter der Zuordnung

(26) $\mathfrak{G}_{S,F}(\sigma,\tau)\to\mathfrak{P}(G_X(\sigma,\tau)):(f,\sigma,\tau)\mapsto\{\overline{G_{f,\sigma,\tau,x_1\ldots x_p}};(x_1,\ldots,x_p)\in X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}\}$

und setzen

$$\mathfrak{G}^*_{S,F}(\sigma,\tau):=\{(f^*,\sigma,\tau);\ (f,\sigma,\tau)\in\mathfrak{G}_{S,F}(\sigma,\tau)\},$$

$$\mathfrak{G}^*_{S,F}:=(\mathfrak{G}^*_{S,F}(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}\quad\text{und}$$

$$I^*_S:=\mathfrak{G}^*_{S,F}|_{S\times S^+}.$$

Seien $\varsigma=r_1\ldots r_m$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$ aus S^*, seien $b\in G_X(\varsigma,\sigma)$, $v_X(b)=((z_1,\ldots,z_m),(y_1,\ldots,y_n))$, und $c\in G_X(\sigma,\tau)$, $v_X(c)=((y_1,\ldots,y_n)(x_1,\ldots,x_p))$, $z_i\in X_{r_i}$ $(i\in[m])$, $y_j\in X_{s_j}$ $(j\in[n])$, $x_k\in X_{t_k}$ $(k\in[p])$, und seien $B=(K_B,e_B,a_B,\gamma_B)$ ein Repräsentant von b und $C=(K_C,e_C,a_C,\gamma_C)$ ein Repräsentant von c mit $K_B\cap K_C=\emptyset$. Das Produkt BC ist wie bei den Berechnungsgraphen definiert durch (22),(23), S.17. Es ist klar, daß BC ein Graph über X vom Typ (σ,τ) ist mit $v_X(BC)=((z_1,\ldots,z_m),(x_1,\ldots,x_p))$. Seien B' ein Graph über X isomorph zu B, C' ein Graph über X isomorph zu C, mit $K_{B'}\cap K_{C'}=\emptyset$. Dann ist offensichtlich B'C' isomorph zu BC. Wir können daher definieren das Pro-

dukt bc der Schemata b und c über X durch $bc:=\overline{BC}$. Damit haben wir für jedes $(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}$ eine partielle Operation

$G_X(\varsigma,\tau)\times G_X(\sigma,\tau)\to G_X(\varsigma,\tau)$ definiert durch

$(b,c)\mapsto bc$ falls $v_X^{(2)}(b)=v_X^{(2)}(c)$.

Diese partielle Operation definiert uns für jedes $(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}$ eine Operation

$$p_{\varsigma,\sigma,\tau}:\mathcal{P}(G_X(\varsigma,\sigma))\times\mathcal{P}(G_X(\sigma,\tau))\to\mathcal{P}(G_X(\varsigma,\tau)):(M,N)\mapsto MN:=$$
$$:=\{a\in G_X(\varsigma,\tau);\exists b\in G_X(\varsigma,\sigma)\,\exists c\in G_X(\sigma,\tau):\ a=bc\}.$$

Die Familie $p=(p_{\varsigma,\sigma,\tau})_{(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}}$ nennen wir das Produkt in $\widehat{G_X}$.

Seien $\sigma=s_1\ldots s_n\in S^+$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, seien für jedes $i\in[n]$ $b_i\in G_X(s_i,\tau)$, $v_X(b_i)=(y_i,(x_1,\ldots,x_p))$, $y_i\in X_{s_i}$, $x_j\in X_{t_j}$ $(j\in[p])$ und $B_i=(K^i,e^i,a^i,\gamma^i)$ ein Repräsentant von b_i, wobei $K^i\cap K^j=\emptyset$ $(i\neq j,\ i,j\in[n])$ gilt. Wie bei den Berechnungsgraphen definieren wir den Graphen

$$\langle B_1,\ldots,B_n\rangle$$

durch (31),(32),S.21. Es ist klar, daß $\langle B_1,\ldots,B_n\rangle$ ein Graph über X vom Typ (σ,τ) ist mit $v_X\langle B_1,\ldots,B_n\rangle=((y_1,\ldots,y_n),(x_1,\ldots,x_p))$. Sei für jedes $i\in[n]$ $\tilde{B}_i$ ein zu B_i isomorpher Graph über X und sei $\tilde{K}^i\cap\tilde{K}^j=\emptyset$ $(i\neq j,\ i,j\in[n])$. Dann ist offensichtlich $\langle\tilde{B}_1,\ldots,\tilde{B}_n\rangle$ isomorph zu $\langle B_1,\ldots,B_n\rangle$. Wir können daher ein Schema $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle\in G_X(\sigma,\tau)$ definieren durch

$$\langle b_1,\ldots,b_n\rangle:=\overline{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}.$$

Dadurch haben wir für jedes $(\sigma,\tau)\in S^+\times S^*$, $\sigma=s_1\ldots s_n$ eine partielle Operation

$G_X(s_1,\tau)\times\ldots\times G_X(s_n,\tau)\to G_X(\sigma,\tau)$ definiert durch

$(b_1,\ldots,b_n)\mapsto\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ falls $v_X^{(2)}(b_1)=v_X^{(2)}(b_2)=\ldots=v_X^{(2)}(b_n)$.

Diese partielle Operation definiert uns für jedes $(\sigma,\tau)\in S^+\times S^*$, $\sigma=s_1\ldots s_n$ eine Operation

(27) $t_{\sigma,\tau}:\mathcal{P}(G_X(s_1,\tau))\times\ldots\times\mathcal{P}G_X(s_n,\tau))\to\mathcal{P}(G_X(\sigma,\tau)):(M_1,\ldots,M_n)\mapsto$

$$\mapsto\langle M_1,\ldots,M_n\rangle:=\{a\in G_X(\sigma,\tau);\exists b_1\in G_X(s_1,\tau),\exists b_2\in G_X(s_2,\tau),\ldots,$$
$$\exists b_n\in G_X(s_n,\tau):\ a=\langle b_1,\ldots,b_n\rangle\};$$

zusätzlich definieren wir für jedes $\tau\in S^*$ durch

(28) $\langle\emptyset\rangle:=((\emptyset:[0]\to[1(\tau)])^*,\varepsilon,\tau)$ in $\widehat{G_X}$

eine nullstellige Operation in $\mathcal{P}(G_X(\varepsilon,\tau))$, die wir mit $t_{\varepsilon,\tau}$ bezeichnen. Die Familie $\lambda:=(t_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ nennen wir das Tupeln in $\widehat{G}_X$.

Jetzt ist also $(\widehat{G}_X;I_S^*,\mathfrak{k},\lambda)$ eine Algebra vom gleichen Typ wie $\mathfrak{F}_\Lambda^{sf,\mathfrak{k}ot}$ und $\mathfrak{F}_\Gamma^{sf,\Gamma ot}$. Beim Vergleich der Definition des Graphen $G_{f,\sigma,\tau,x_1\ldots x_p}$ über X bzw. der Menge (f^*,σ,τ) solcher Graphen, die durch (26),S.50 einem Element $(f:[n]\to[p],\sigma,\tau)$ aus $\mathfrak{G}_{S,F}$ zugeordnet ist, und der Definition des Berechnungsgraphen $B_{f,\sigma,\tau}$ (s.(16),S.15) ist es nicht schwer einzusehen, daß (26) ein Homomorphismus $(\mathfrak{G}_{S,F};I_S,\mathfrak{k},\lambda)\to(\widehat{G}_X;I_S^*,\mathfrak{k},\lambda)$ ist. $\mathfrak{G}_{S,F}^*$ ist also eine Unteralgebra von $\widehat{G}_X$. $\widehat{G}_X$ ist keine Theorie, denn es besitzt nicht die Eigenschaft (54),S.30.

Seien jetzt Ω,X,π und Γ wie im letzten Abschnitt (s.S.47) und $\mathfrak{F}_\Gamma^{sf,\Gamma ot}$ die zugehörige Mengenfamilie von Programmen. Sei $c\in\in S_\Gamma^{sf,\Gamma ot}(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\ldots s_n,\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, und sei $C=(K,e,a,\gamma)$ ein Repräsentant von c. C ist also ein Berechnungsgraph über vom Typ (,) mit $\overline{C}=c$. Wir bezeichnen für jedes $(x_1,\ldots,x_p)\in X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}$ mit

(29) $C_{x_1\ldots x_p}$

den Graphen $(K,e,a,\tilde{\gamma})$ über X, wobei die Abbildung $\tilde{\gamma}$ auf folgende Weise rekursiv nach der Höhe der Knoten von C definiert ist:

(30) $\tilde{\gamma}(a_j):=(x_j,t_j)\quad(j\in[p])$;

(31) sind $k\in K$ und $\gamma(k)=(\omega,\pi_{s,\varepsilon}(\omega))$, $\omega\in\Omega_\varepsilon^s$, $s\in S$, so sei

$\tilde{\gamma}(k):=((\pi_{s,\varepsilon}(\omega)(\emptyset),s))$;

(32) sind $k\in K$, $\gamma(k)=((\omega,\pi_{s,\varsigma}(\omega)),k_1,\ldots,k_m)$, $\omega\in\Omega_{r_1\ldots r_m}^s$, $s\in S$, $\varsigma=r_1\ldots r_m\in S^*$, und ist $\tilde{\gamma}(k_i)=((y_i,r_i),\ldots)$, $(y_i,r_i)\in X_{r_i}\times S$ $(i\in[m])$, so sei $\tilde{\gamma}(k):=((\pi_{s,\varsigma}(\omega)(y_1,\ldots,y_m),s),k_1,\ldots,k_m)$.

Wir nennen den Graphen $C_{x_1\ldots x_p}$ über X vom Typ (σ,τ) den Berechnungslauf von C für das Argument $(x_1,\ldots,x_p)$. Sein äußeres Verhalten ist ein Paar

(33) $v_X(C_{x_1\ldots x_p})=((y_1,\ldots,y_n),(x_1,\ldots,x_p))$ mit gewissen $y_i\in X_{s_i}$ $(i\in[n])$.

Die Menge

(34) $b(C) := \{C_{x_1 \ldots x_p}; (x_1, \ldots, x_p) \in X_{t_1} \times \ldots \times X_{t_p}\}$

von Graphen über X heißt die Berechnung von C.

Es ist klar, daß für zwei isomorphe Repräsentanten C,C' von c die Graphen $C_{x_1 \ldots x_p}$ und $C'_{x_1 \ldots x_p}$ über X isomorph sind. Wir nennen die Isomorphieklasse des Graphen $C_{x_1 \ldots x_p}$, d.h. das Schema über X

(35) $\overline{C_{x_1 \ldots x_p}} \in G_X(\sigma,\tau)$

den Berechnungslauf des Programms c für das Argument $(x_1, \ldots, x_p)$,

(36) $v_X(\overline{C_{x_1 \ldots x_p}}) = ((y_1, \ldots, y_n), (x_1, \ldots, x_p))$

ist sein äußeres Verhalten. Wir ordnen dem Programm c noch die Menge

(37) $b(c) := \{\overline{C_{x_1 \ldots x_p}}; (x_1, \ldots, x_p) \in X_{t_1} \times \ldots \times X_{t_p}\} \in \mathfrak{P}(G_X(\sigma,\tau))$

zu, und nennen b(c) die Berechnung des Programms c.

Für jedes $(x_1, \ldots, x_p) \in X_{t_1} \times \ldots \times X_{t_p}$ liefert uns der Berechnungslauf $\overline{C_{x_1 \ldots x_p}}$ ein $(y_1, \ldots, y_n) \in X_{s_1} \times \ldots \times X_{s_n}$ als die erste Komponente seines äußeren Verhaltens. Wir bezeichnen die Abbildung

$$X_{t_1} \times \ldots \times X_{t_p} \to X_{s_1} \times \ldots \times X_{s_n} : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto (y_1, \ldots, y_n) = v_X^{(1)}(\overline{C_{x_1 \ldots x_p}})$$

mit

(38) $v_X(b(c))$

und nennen sie das äußere Verhalten der Berechnung b(c).

Definition.
Die Berechnung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}$ ist die Interpretation

(39) $\mathcal{b} : \mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t} \to \widehat{G_X} : c \mapsto b(c)$.

Seien $\sigma = s_1 \ldots s_n$, $\tau = t_1 \ldots t_p$ aus S^*, $(f : [n] \to [p], \sigma, \tau)$ aus $\mathfrak{G}_{S,F}(\sigma,\tau)$, seien $B_{f,\sigma,\tau}$ der zugehörige Berechnungsgraph über Γ (vgl.(16), S.15) und $(f,\sigma,\tau) \in S_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}(\sigma,\tau)$ seine Isomorphieklasse (vgl.(20), S.16). Der Berechnungslauf des Programms (f,σ,τ) für ein Argument $(x_1, \ldots, x_p) \in X_{t_1} \times \ldots \times X_{t_p}$ ist genau die Isomorphieklasse $\overline{G_{f,\sigma,\tau,x_1 \ldots x_p}} \in G_X(\sigma,\tau)$ des Graphen (25),S.50, direkt nach Definition. Die Berechnung des Programms (f,σ,τ) ist nach Definition

(40) $b(f,\sigma,\tau)=b(\overline{B_{f,\sigma,\tau}})=\{\overline{G_{f,\sigma,\tau,x_1\ldots x_p}};(x_1,\ldots,x_p)\in X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}\}$,

die Menge der Berechnungsläufe für alle Argumente, und das ist gerade das dem Element (f,σ,τ) aus $\Sigma_{S,F}$ entsprechende Element (f^*,σ,τ) aus $\widehat{G_X}$ (s.(26),S.50). Das äußere Verhalten der Berechnung (40) ist die Abbildung

(41) $v_X(b(f,\sigma,\tau)):X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}\to X_{s_1}\times\ldots\times X_{s_n}:(x_1,\ldots,x_p)\mapsto(x_{f(1)},\ldots,x_{f(n)})$.

Wir möchten noch Folgendes anmerken:
Ist $c=\overline{(K,e,a,\gamma)}$ ein Programm aus $S_F^{sf,\Sigma t}(s,\tau)$, $s\in S$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^+$, und ist $e_1=a_j$, $j\in[p]$, so ist offensichtlich

(42) $v_X(b(c)):X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}\to X_s:(x_1,\ldots,x_p)\mapsto x_j$,

und das ist gerade das äußere Verhalten $v_X(b(\overline{B_{j_p,s,\tau}}))$ der Berechnung des Programms $\overline{B_{j_p,s,\tau}}=(j:[1]\to[p],s,\tau)\in I_S(s,\tau)$ in $\mathfrak{P}_F^{sf,\Sigma t}$.

Seien $\varsigma=r_1\ldots r_m$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$ aus S^*, seien $a\in S_F^{sf,\Sigma t}(\varsigma,\sigma)$, $c\in S_F^{sf,\Sigma t}(\sigma,\tau)$, und seien A ain Repräsentant von a und C ein Repräsentant von c mit disjunkten Knotenmengen. Wir bezeichnen

$$D:=AC \quad \text{und} \quad d:=\overline{D}=ac.$$

Aus der Definition des Produkts AC zweier Berechnungsgraphen über Γ und aus der Definition eines Berechnungslaufes folgt, daß für $(x_1,\ldots,x_p)\in X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}$ zu dem Berechnungslauf $\overline{D_{x_1\ldots x_p}}$ von d ein n-tupel $(y_1,\ldots,y_n)\in X_{s_1}\times\ldots\times X_{s_n}$ existiert, ein Berechnungslauf $\overline{C_{x_1\ldots x_p}}$ von c mit $v_X^{(1)}(\overline{C_{x_1\ldots x_p}})=(y_1,\ldots,y_n)$ und ein Berechnungslauf $\overline{A_{y_1\ldots y_n}}$ von a, so daß

$$\overline{D_{x_1\ldots x_p}}=\overline{A_{y_1\ldots y_n}}\;\overline{C_{x_1\ldots x_p}}.$$

Nach der Definition des Produkts in $\widehat{G_X}$ gilt also

(43) $b(d)\subseteq b(a)b(c)$.

Außerdem gilt

(44) $v_X(b(d))=v_X(b(a))\circ v_X(b(c))$,

wenn wir für die Abbildungen $f=v_X(b(a)):X_{s_1}\times\ldots\times X_{s_n}\to X_{r_1}\times\ldots\times X_{r_m}$ und $g=v_X(b(c)):X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}\to X_{s_1}\times\ldots\times X_{s_n}$ mit $\circ$ die Komposition f nach g $f\circ g:X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}\to X_{r_1}\times\ldots\times X_{r_m}$ bezeichnen. Die zu (43) umgekehrte Inklusion ist genauso einfach:
Für zwei Berechnungsläufe $\overline{A_{y_1\ldots y_n}}$ von a und $\overline{C_{x_1\ldots x_p}}$ von c ist

ihr Produkt genau dann in der Menge auf der rechten Seite in (43), wenn $v_X^{(1)}(\overline{C_{x_1\dots x_p}})=(y_1,\dots,y_n)$. Dann ist aber offensichtlich das Produkt

$$\overline{A_{y_1\dots y_n}}\ \overline{C_{x_1\dots x_p}}$$

der Schemata über X ein Berechnungslauf δ des Programms d für das Argument $(x_1,\dots,x_p)$ mit $v_X^{(1)}(\delta)=v_X^{(1)}(\overline{A_{y_1\dots y_n}})$. Wir erhalten

(45) $b(d)=b(a)b(c)$ in $\widehat{G_X}$.

Seien $\sigma=s_1\dots s_n\in S^+$, $\tau=t_1\dots t_p\in S^*$, seien $a_i\in S_r^{sf,\Gamma_0 t}(s_i,\tau)$ und A_i ein Repräsentant von a_i ($i\in[n]$), und die Knotenmengen von $A_1,\dots,A_n$ seien paarweise disjunkt. Wir bezeichnen

$$D:=\langle A_1,\dots,A_n\rangle \quad\text{und}\quad d:=\langle a_1,\dots,a_n\rangle.$$

Aus der Definition des Tupelns von Berechnungsgraphen und aus der Definition eines Berechnungslaufes folgt, daß für $(x_1,\dots,x_p)\in X_{t_1}\times\dots\times X_{t_p}$ zu dem Berechnungslauf $\overline{D_{x_1\dots x_p}}$ von d mit $v_X^{(1)}(\overline{D_{x_1\dots x_p}})=(y_1,\dots,y_n)\in X_{s_1}\times\dots\times X_{s_n}$ für jedes $i\in[n]$ ein Berechnungslauf $\overline{A_{i,x_1\dots x_p}}$ von A_i existiert mit $v_X^{(1)}(\overline{A_{i,x_1\dots x_p}})=y_i$, so daß

$$\overline{D_{x_1\dots x_p}}=\langle\overline{A_{1,x_1\dots x_p}},\overline{A_{2,x_1\dots x_p}},\dots,\overline{A_{n,x_1\dots x_p}}\rangle.$$

Nach der Definition des Tupelns in $\widehat{G_X}$ gilt also

(46) $b(d)\subseteq\langle b(a_1),\dots,b(a_n)\rangle$.

Außerdem gilt

(47) $v_X(b(d))=\langle v_X(b(a_1)),\dots,v_X(b(a_n))\rangle$,

wenn wir für die Abbildungen $f_i=v_X(b(a_i)):X_{t_1}\times\dots\times X_{t_p}\to X_{s_i}$ ($i\in[n]$) mit $f=\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ die Abbildung

$$f:X_{t_1}\times\dots\times X_{t_p}\to X_{s_1}\times\dots\times X_{s_n}:\varkappa\mapsto(f_1(\varkappa),\dots,f_n(\varkappa))$$

bezeichnen. Die zu (46) umgekehrte Inklusion ist ebenso einfach: Sei $\delta\in\langle b(a_1),\dots,b(a_n)\rangle$. Nach der Definition des Tupelns in $\widehat{G_X}$ (s.(27),S.51) gibt es dann Berechnungsläufe $\alpha_1\in b(a_1),\dots,\alpha_n\in b(a_n)$ mit

(48) $v_X^{(2)}(\alpha_1)=v_X^{(2)}(\alpha_2)=\dots=v_X^{(2)}(\alpha_n)$.

Es ist klar, daß das Schema $\langle\alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle$ über X ein Berechnungslauf des Programms d für das Argument (48) ist. Wir erhalten:

(49) $b\langle a_1,\dots,a_n\rangle=\langle b(a_1),\dots,b(a_n)\rangle$ in $\widehat{G_X}$.

Im Falle $\sigma=\varepsilon$, $\tau=t_1\dots t_p$ aus S^* ist nach Definition

$$b\langle\emptyset\rangle=((\emptyset:[0]\to[p])^*,\varepsilon,\tau)$$

das einzige Element in $\mathfrak{G}^*_{S,F}(\varepsilon,\tau)\subseteq\widehat{G_X}(\varepsilon,\tau)$.

5.4. Satz.
$b:\mathfrak{A}_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}t}\to\widehat{G_X}$ ist ein Homomorphismus $(\mathfrak{A}_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}t};I_S,\mathfrak{p},\mathfrak{l})\to(\widehat{G_X};I_S^*,\mathfrak{p},\mathfrak{l})$.

5.4. Äußeres-Verhalten-Interpretation von Berechnungen (Fall algebraische Berechnungen)

Wir verwenden alle Bezeichnungen aus dem Abschnitt 5.3. Im Bezug auf die Mengenfamilie $X=(X_s)_{s\in S}$ bezeichnen wir zusätzlich für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\dots s_n$, $\tau=t_1\dots t_p$ mit $(X)(\sigma,\tau)$ die Menge aller Abbildungen $X_{t_1}\times\dots\times X_{t_p}\to X_{s_1}\times\dots\times X_{s_n}$ und setzen

(50) $(X):=((X)(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$.

Das Produkt $\mathfrak{p}=(p_{\varsigma,\sigma,\tau})_{(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}}$ in (X) ist definiert durch

(51) $p_{\varsigma,\sigma,\tau}:(X)(\varsigma,\sigma)\times(X)(\sigma,\tau)\to(X)(\varsigma,\tau):(f,g)\to f\circ g$ (f nach g).

Das Tupeln $\mathfrak{l}=(t_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ in (X) ist definiert durch

(52) $t_{\sigma,\tau}:(X)(s_1,\tau)\times\dots\times(X)(s_n,\tau)\to(X)(\sigma,\tau):(f_1,\dots,f_n)\to\langle f_1,\dots,f_n\rangle$
mit $\langle f_1,\dots,f_n\rangle(\omega)=(f_1(\omega),\dots,f_n(\omega))$ $(\omega\in X_{t_1}\times\dots\times X_{t_p})$
$(\sigma=s_1\dots s_n,\ \tau=t_1\dots t_p\in S^*)$.

Für jedes Element $(f:[n]\to[p],\sigma,\tau)\in\mathfrak{G}_{S,F}(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\dots s_n,\tau=t_1\dots t_p\in S^*$, bezeichnen wir mit (f^*,σ,τ) das Element aus $(X)(\sigma,\tau)$ definiert durch

(53) $(f^*,\sigma,\tau):X_{t_1}\times\dots\times X_{t_p}\to X_{s_1}\times\dots\times X_{s_n}:(x_1,\dots,x_p)\to(x_{f(1)},\dots,x_{f(n)})$

Man kann sich leicht überzeugen, daß Folgendes gilt:

Für $(g:[m]\to[n],\varsigma,\sigma)\in\mathfrak{G}_{S,F}(\varsigma,\sigma)$, $(f:[n]\to[p],\sigma,\tau)\in\mathfrak{G}_{S,F}(\sigma,\tau)$, $\varsigma=r_1\dots r_m,\sigma=s_1\dots s_n,\tau=t_1\dots t_p\in S^*$, ist

(54) $(g^*,\varsigma,\sigma)\circ(f^*,\sigma,\tau)=((gf)^*,\varsigma,\tau)$ in (X),
wobei gf die Komposition g gefolgt von f von Abbildungen ist.

Für $(f_i:[1]\to[p],s_i,\tau)\in\mathfrak{S}_{S,F}(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$, $s_1\ldots s_n:=\sigma$, $\tau=$ $=t_1\ldots t_p\in S^*$, ist

(55) $\langle(f_1^*,s_1,\tau),\ldots,(f_n^*,s_n,\tau)\rangle=(\langle f_1,f_2,\ldots,f_n\rangle^*,\sigma,\tau)$ in (X), wobei $\langle f_1,f_2,\ldots,f_n\rangle$ das Tupeln von Abbildungen in (36), S.23 ist.

(56) Besitzt jede der Mengen X_s $(s\in S)$ mindestens zwei Elemente, so ist $\mathfrak{S}_{S,F}(\sigma,\tau)\to(X)(\sigma,\tau):(f,\sigma,\tau)\mapsto(f^*,\sigma,\tau)$ $((\sigma,\tau)\in S^{*2})$ eine komponentenweise Injektion von $\mathfrak{S}_{S,F}$ in (X).

Wir bezeichnen für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$ $\mathfrak{S}^*_{S,F}(\sigma,\tau):=\{(f^*,\sigma,\tau);\ (f,\sigma,\tau)\in$ $\in\mathfrak{S}_{S,F}(\sigma,\tau)\}$ und setzen

(57) $\mathfrak{S}^*_{S,F}:=(\mathfrak{S}^*_{S,F}(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ und

(58) $I^*_S:=\mathfrak{S}^*_{S,F}|_{S\times S^+}$.

Mit dieser Bezeichnung ist

(59) $((X);I^*_S,\curlywedge,\curlyvee)$

eine Algebra vom gleichen Typ wie $(\mathfrak{P}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t};I_S,\curlywedge,\curlyvee)$ und wie jede Theorie über dem Indexbereich S. $(\mathfrak{S}^*_{S,F};I_S,\curlywedge,\curlyvee)$ ist eine Unteralgebra von (X) (generiert durch $\emptyset$).

Sei $\mathfrak{b}(\mathfrak{P}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t})=(\mathfrak{b}(S_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}(\sigma,\tau)))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}\subseteq\widehat{G_X}$ die Mengenfamilie aller Berechnungen von Programmen aus $\mathfrak{P}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}$ aus dem letzten Abschnitt. Wir haben dort jeder Berechnung $b(c)\in\mathfrak{b}(S_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}(\sigma,\tau))$ ein Element $v_X(b(c))\in(X)(\sigma,\tau)$ zugeordnet, das äußere Verhalten von b(c) (s.(38),S.53). Das definiert uns eine Interpretation von Berechnungen:

Definition.
Die äußeres-Verhalten-Interpretation von Berechnungen aus $\mathfrak{b}(\mathfrak{P}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t})$ ist die Interpretation

(60) $v_X:\mathfrak{b}(\mathfrak{P}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t})\to(X):b(c)\mapsto v_X(b(c))$.

Seien $\omega\in\Omega_\tau^S$, $s\in S$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, und $\pi_{s,\tau}(\omega)\in(X)(s,\tau)$ die zugeordnete Operation (s.(15),S.47). Wir erinnern daran, daß die Zeichenmenge

$$\Gamma=\bigcup_{s\in S,\tau\in S^*}\Gamma_\tau^S,\quad \Gamma_\tau^S=\{(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega));\omega\in\Omega_\tau^S\}\ ((s,\tau)\in S\times S^*)$$

mittels $\gamma\mapsto\overline{B_\gamma}$ (vgl.(6),S.13, und (8)) in $\mathfrak{P}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}$ eingebettet ist.

Direkt aus den Definitionen des Berechnungsgraphen B_γ, $\gamma=(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega))\in$ $\in\Gamma_\tau^S$, $(s,\tau)\in S\times S^*$, der Berechnungsläufe des Schemas $\overline{B_\gamma}=\gamma\in S_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}t}(s,\tau)$, der zugehörigen Berechnung $b(\gamma)\in\mathcal{P}(G_X(s,\tau))$ und ihres äußeren Verhaltens $v_X(b(\gamma))\in(X)(s,\tau)$ ergibt sich

(61) $v_X(b(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega)))=\pi_{s,\tau}(\omega)\quad(\omega\in\Omega_\tau^S,\ (s,\tau)\in S\times S^*)$.

Bereits im letzten Abschnitt haben wir gezeigt:

$v_X(b(f,\sigma,\tau))=(f^\#,\sigma,\tau)\quad((f,\sigma,\tau)\in\mathfrak{G}_{S,F}(\sigma,\tau),\ (\sigma,\tau)\in S^{*2})$ (s.(417,S.54);

(62) ist $c=\overline{(K,e,a,\gamma)}\in S_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}t}(s,\tau)$, $s\in S$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^+$, und ist $e_1=a_j$, $j\in[p]$, so ist $v_X(b(c))=v_X(b(\overline{B_{j_p,s,\tau}}))=(j_p^*,s,\tau)$ in (X) (s.(42),S.54);

$v_X:\mathfrak{k}(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}t})\to(X)$ erhält das Produkt (s.(45),S.55 und (44), S.54) und das Tupeln (s.(49),(47),S.55) in $\widehat{G_X}$.

5.5. Satz.

$v_X:\mathfrak{k}(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}t})\to(X)$ ist ein Homomorphismus $(\mathfrak{k}(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}t});I_S,\mathfrak{p},\mathfrak{L})\to$ $\to((X);I_S^*,\mathfrak{p},\mathfrak{L})$ mit den Eigenschaften (61),(62).

5.5. Berechenbare-Abbildung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}t}$ mittels Berechnungen (Fall algebraische Berechnungen)

Die Berechnung-Interpretation $\mathfrak{k}$ von Programmen aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}t}$, Abschnitt 5.3, ordnet jedem Programm $c\in S_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}t}(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$ seine Berechnung b(c) zu. Die äußeres-Verhalten-Interpretation v_X von Berechnungen, Abschnitt 5.4, ordnet dieser Berechnung ein Element $v_X(b(c))\in(X)(\sigma,\tau)$ zu, das äußere Verhalten der Berechnung b(c) . Die komponentenweise Zusammensetzung von $\mathfrak{k}$ und v_X ist eine neue Interpretation über $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}t}$. Die dem Programm c durch diese Interpretation zugeordnete Abbildung $v_X(b(c))$: $X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}\to X_{s_1}\times\ldots\times X_{s_n}$ nennen wir die durch c mittels der Berechnung b(c) berechenbare Abbildung.

Definition.

Die berechenbare-Abbildung-Interpretation der Programme aus

$\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}$ mittels Berechnungen ist die Interpretation

(63) $\mathfrak{v}_X : \mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t} \to (X) : c \mapsto v_X(b(c))$.

Aus den Sätzen 5.4, S.56 und 5.5, S.58 folgt:

5.6. Satz.
$\mathfrak{v}_X : \mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t} \to (X)$ ist ein Homomorphismus $(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}; I_S, \varphi, \mathcal{A}) \to$
$\to ((X); I_S, \varphi, \mathcal{A})$ mit den Eigenschaften (61),(62),S.58.

5.6. Direkte berechenbare-Abbildung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}$ (Fall algebraische Berechnungen)

Mann kann auch auf eine andere Weise jedem Programm c aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}$ eine Abbildung über Mengen der Familie $X=(X_s)_{s\in S}$ zuordnen, die als eine durch c berechenbare Abbildung betrachtet werden kann. Seien Ω, X, π und Γ wie im Abschnitt 5.2, S.47.

Seien $c \in S_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}(\sigma,\tau)$ ein Programm, $\sigma = s_1 \ldots s_n, \tau = t_1 \ldots t_p \in S^*$, und $C=(K,e,a,\gamma)$ ein Repräsentant von c. Wir ordnen jedem Knoten k von C rekursiv nach der Höhe von k eine Abbildung aus $(X)(s,\tau)$, $s\in S$, als sein Verhalten $v'_X(k)$ zu:

(64) für $j \in [n]$ sei $v'_X(a_j) \in (X)(t_j,\tau)$ die j-te Projektion j_p^*: $(x_1,\ldots,x_p) \mapsto x_j$;

(65) sind $k\in K$ und $\gamma(k) = (\omega, \pi_{s,\varepsilon}(\omega))$, $\omega \in \Omega_\varepsilon^s$, $s\in S$, so sei $v'_X(k) \in (X)(s,\tau)$ die konstante Abbildung $(x_1,\ldots,x_p) \mapsto \pi_{s,\varepsilon}(\omega)(\emptyset)$;

(66) sind $k\in K$ und $\gamma(k) = ((\omega, \pi_{s,\varsigma}(\omega)), k_1, \ldots, k_m)$, $\omega \in \Omega_{r_1\ldots r_m}^s$, $s\in S$, $\varsigma = r_1 \ldots r_m \in S^+$, und ist $v'_X(k_i) \in (X)(r_i,\tau)$ das Verhalten von k_i $(i\in[m])$, so sei $v'_X(k) \in (X)(s,\tau)$ definiert durch $v'_X(k)(x_1,\ldots,x_p) := \pi_{s,\varsigma}(\omega)(v'_X(k_1)(x_1,\ldots,x_p), v'_X(k_2)(x_1,\ldots,x_p), \ldots, v'_X(k_m)(x_1,\ldots,x_p))$.

Das äußere Verhalten $v'_X(C)$ des Berechnungsgraphen C ist die Abbildung $v'_X(C) \in (X)(\sigma,\tau)$ definiert durch

$$v'_X(C)(x_1,\ldots,x_p) := (v'_X(e_1)(x_1,\ldots,x_p), v'_X(e_2)(x_1,\ldots,x_p), \ldots, v'_X(e_n)(x_1,\ldots,x_p)).$$

Es ist klar, daß zwei isomorphe Repräsentanten C,C' von c ein und

dasselbe äußere Verhalten haben. Die durch das Program c berechenbare Abbildung $v'_X(c)\in(X)(\sigma,\tau)$ ist

$$v'_X(c):=v'_X(C).$$

Definition.
Die direkte berechenbare-Abbildung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}$ ist die Interpretation

(67) $v'_X:\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}\to(X):c\mapsto v'_X(c)$.

Ist $(f:[n]\to[p],\sigma,\tau)\in\tilde{G}_{S,F}(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\dots s_n$, $\tau=t_1\dots t_p\in S^*$, und ist $B_{f,\sigma,\tau}$ der zugehörige Berechnungsgraph über Γ (vgl.(16),S.15), so ist direkt nach der Definition des äußeren Verhaltens v'_X

$$v'_X(\overline{B_{f,\sigma,\tau}})=(f^*,\sigma,\tau):(x_1,\dots,x_p)\mapsto(x_{f(1)},\dots,x_{f(n)})$$

aus $\tilde{G}^*_{S,F}(\sigma,\tau)$ (s.(53),S.56). Außerdem gilt offensichtlich für ein Programm $c=\overline{(K,e,a,\gamma)}\in S_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}(s,\tau)$, $s\in S$, $\tau=t_1\dots t_p\in S^*$, mit $e_1=a_j$, $j\in[p]$,

(68) $v'_X(c)=v'_X(\overline{B_{j_p,s,\tau}})=(j_p^*,s,\tau)\in I_S^*(s,\tau)$ in (X).

Sind $\omega\in\Omega_\tau^s$, $s\in S$, $\tau\in S^*$, $(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega))\in\Gamma_\tau^s$ das zugehörige Zeichen aus Γ und $B_{(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega))}$ der zugeordnete Berechnungsgraph über Γ (s.(4), S.12), so ist nach der Definition des äußeren Verhaltens v'_X

(69) $v'_X(\overline{B_{(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega))}})=\pi_{s,\tau}(\omega)\in(X)(s,\tau)$.

Aus der Definition des Produkts zweier Berechnungsgraphen B vom Typ $(\ ,\ )$ und C vom Typ (σ,τ) (mit disjunkten Knotenmengen) über Γ, $\varsigma,\sigma,\tau\in S^*$(s.S.17) und aus den Definitionen des äußeren Verhaltens v'_X und des Produkts in (X) (s.(51),S.56) sieht man sofort, daß

$$v'_X(BC)=v'_X(B)\circ v'_X(C) \quad \text{in } (X).$$

Ebenso einfach ergibt sich aus der Definition des Tupelns für Berechnungsgraphen B_i vom Typ (s_i,τ) (mit paarweise disjunkten Knotenmengen) über Γ $(i\in[n])$, und aus der Definition des Tupelns in (X) (s.(52),S.56)

$$v'_X\langle B_1,\dots,B_n\rangle=\langle v_X(B_1),\dots,v_X(B_n)\rangle \quad \text{in } (X).$$

5.7. Satz.
$v'_X:\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}\to(X)$ ist ein Homomorphismus $(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t};I_S,\curlywedge,\lambda)\to$ $\to((X);I_S,\curlywedge,\lambda)$ mit den Eigenschaften (68),(69).

5.7. Berechenbare-Abbildung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}$ mittels Terme

Es gibt noch dritte Möglichkeit, jedem Programm c aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}$ eine Abbildung über den Mengen der Familie $X=(X_s)_{s\in S}$ zuzuordnen, die als eine durch c berechenbare Abbildung angesehen werden kann. Wir erwähnen zuerst einige benötigte algebraische Begriffe.

Seien $(\mathcal{T};I_S,\mathcal{F},\mathcal{A})$ eine (heterogene) Theorie mit dem Indexbereich S, $X=(X_s)_{s\in S}$ eine Mengenfamilie und sei $\varphi:(\mathcal{T};I_S,\mathcal{F},\mathcal{A})\to((X);I_S^{\#},\mathcal{F},\mathcal{A})$ ein Homomorphismus in die Algebra (X) (s.(59),S.57). Das Abbild $\varphi(\mathcal{T})$ von $\mathcal{T}$ in (X) heißt eine (heterogene) $\mathcal{T}$-Algebra über X. Ein Morphismus $f:\varphi(\mathcal{T})\to\Psi(\mathcal{T})$ einer $\mathcal{T}$-Algebra $\varphi(\mathcal{T})$ über X in eine $\mathcal{T}$-Algebra $\Psi(\mathcal{T})$ über $Y=(Y_s)_{s\in S}$ ist eine komponentenweise Abbildung $f=(f_s)_{s\in S}:X\to Y$ mit der Eigenschaft

$$\forall a\in T(\sigma,\tau),\ \sigma=s_1\ldots s_n,\tau=t_1\ldots t_p\in S^*:$$

$$\varphi(a)(x_1,\ldots,x_p)=(x'_1,\ldots,x'_n)\ \Rightarrow\ \Psi(a)(f(x_1),\ldots,f(x_p)=(f(x'_1),\ldots,f(x'_n))$$

$$((x_1,\ldots,x_p)\in X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}).$$

Die freie Theorie generiert durch Ω $\mathfrak{S}_{S,F}[\Omega]=(\mathcal{T}_\Omega;I_S,\mathcal{F},\mathcal{A})$ (s.(12), S.46) besitzt die folgende wichtige Eigenschaft:

Zu einer gegebenen Mengenfamilie $X=(X_s)_{s\in S}$ und einer gegebenen Familie von Abbildungen $\pi=(\pi_{s,\tau})_{(s,\tau)\in S\times S^*}$, $\pi_{s,\tau}:\Omega_\tau^s\to$ $\to(X)(s,\tau)$ $((s,\tau)\in S\times S^*)$, existiert genau ein Homomorphismus

(70) $\varphi:(\mathcal{T}_\Omega;I_S,\mathcal{F},\mathcal{A})\to((X);I_S^*,\mathcal{F},\mathcal{A})$, der π erweitert.

Wir bezeichnen mit φ_π den Homomorphismus in (70).

Seien jetzt Ω,X,π und Γ wie im Abschnitt 5.2, S.47. Die Komposition der Terme-Interpretation $v_{\mathcal{T}}:(\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega\circ t};I_S,\mathcal{F},\mathcal{A})\to(\mathcal{T}_\Omega;I_S,\mathcal{F},\mathcal{A})$ (Abschnitt 5.1) mit der Eigenschaft (11),S.45, die Ω elementenweise festhält(s. Satz 5.2, S.66) und des durch π eindeutig bestimmten Homomorphismus (70) ergibt ein Homomorphismus von $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega\circ t}$ nach $\mathcal{T}_\Omega$. Wir erinnern daran, daß die Algebren $(\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\Omega\circ t};I_S,\mathcal{F},\mathcal{A})$ und $(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t};I_S,\mathcal{F},\mathcal{A})$ isomorph sind.

Definition.
Die berechenbare-Abbildung-Interpretation der Programme aus

$\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}$ mittels Terme ist die Interpretation

(71) $\nu_{\mathcal{T}}\varphi_\pi : \mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t} \to (X)$.

5.8. Satz.

$\nu_{\mathcal{T}}\varphi_\pi : \mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t} \to (X)$ ist ein Homomorphismus $(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}; I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A}) \to$ $\to ((X)); I_S^*, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ mit $(\omega, \pi_{s,\tau}(\omega)) \mapsto \pi_{s,\tau}(\omega)$ $(\omega \in \Omega_\tau^S,\ (s,\tau) \in S \times S^*)$ und mit der Eigenschaft:

Für $c = \overline{(K,e,a,\gamma)} \in S_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}(s,\tau)$, $s \in S$, $\tau = t_1 \ldots t_p \in S^+$, mit $e_1 = a_j$, $j \in [p]$, ist $\nu_{\mathcal{T}}\varphi_\pi(c) = \nu_{\mathcal{T}}\varphi_\pi(j_p, s, \tau) = (j_p^*, s, \tau)$ in (X).

5.8. Die nach den Programmen aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}$ berechenbaren Abbildungen (Fall algebraische Berechnungen)

Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß die drei berechenbare-Abbildung-Interpretationen von Programmen aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}$

(72) $\mathfrak{b}\nu_X,\ \nu_X',\ \nu_{\mathcal{T}}\varphi_\pi \ : \mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t} \to (X)$

aus den Abschnitten 5.5, 5.6 und 5.7 gleich sind, und gewinnen eine algebraische Charakterisierung ihres Wertebereiches in (X).

Nach den Sätzen 5.6 (S.59), 5.7 (S.60) und 5.8 sind (72) Homomorphismen

(73) $\varphi : (\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}; I_S, \mathcal{F}, \mathcal{A}) \to ((X); I_S^*, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ mit

(74) $\varphi : (\omega, \pi_{s,\tau}(\omega)) \mapsto \pi_{s,\tau}(\omega)$ $(\omega \in \Omega_\tau^S,\ (s,\tau) \in S \times S^*)$

und mit der Eigenschaft:

(75) Für $c = \overline{(K,e,a,\gamma)} \in S_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}(s,\tau)$, $s \in S$, $\tau = t_1 \ldots t_p \in S$, mit $e_1 = a_j$, $j \in [p]$, ist $\varphi(c) = \varphi(j_p : [1] \to [p], s, \tau) = (j_p^*, s, \tau) \in I_S(s,\tau)$ in (X).

Die Algebra $((X); I_S^*, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ besitzt offensichtlich die Eigenschaft (vgl. mit (54),S.30):

(76) Sind $(\sigma,\tau) \in S^{*2}$, $\sigma = s_1 \ldots s_n$ und $f_i \in (X)(s_i,\tau)$ $(i \in [n])$, so gibt es genau ein $f \in (X)(\sigma,\tau)$ s.d. $(i_n^*, s_i, \sigma)f = f_i$ $(i \in [n])$.

(Es genügt $f = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ in (X) zu nehmen.) Daraus ergibt sich für jedes $f \in (X)(\sigma,\tau)$, $(\sigma,\tau) \in S^+ \times S^*$, $\sigma = s_1 \ldots s_n$, $\tau = t_1 \ldots t_p$ (vgl.(56) S.30) $\langle (1_n, s_1, \sigma)f, (2_n, s_2, \sigma)f, \ldots, (n_n, s_n, \sigma)f \rangle = f$. Man nennt $(i_n^*, s_i, \sigma)f$ $(i \in [n])$ ebenfalls die Komponenten von f. (X) ist im

allgemeinen keine Theorie, es sei denn, daß jede der Mengen X_s ($s\in S$) mindestens zwei Elemente enthält, so daß wir mittels $(f:[n]\to[p],\sigma,\tau)\mapsto(f^*,\sigma,\tau)$ $\mathfrak{S}_{S,F}$ in $\mathfrak{S}^*_{S,F}$ komponentenweise einbetten können. In diesem Fall können wir sofort die Sätze 4.1, S.34 und 4.2, S.40 anwenden. Man sieht jedoch ohne Schwierigkeiten, daß wegen der oben beschriebenen Eigenschaft von (X) sowohl die Behauptung des Satzes 4.1 bezüglich $(\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\mathfrak{L}ot};I_S,\mathfrak{k},\mathfrak{l})$ und ihr Beweis als auch die anschliessende Betrachtung über Zerlegung der Schemata aus $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\mathfrak{L}ot}$ und die entsprechende Behauptung des Satzes 4.2 gültig bleiben, wenn wir überall die Zieltheorie $(\mathfrak{T};I_S,\mathfrak{k},\mathfrak{l})$ des Homomorphismus (3),S.34 durch die Algebra $((X);I^*_S,\mathfrak{k},\mathfrak{l})$ ersetzen, und die Elemente (f,σ,τ) aus $\mathfrak{S}_{S,F}$ durch die Elemente (f^*,σ,τ) aus $\mathfrak{S}^*_{S,F}$ ersetzen. Wir erhalten dann:

Jeder Homomorphismus (73),S.62 mit der Eigenschaft (74) ist durch seine Werte auf den Elementen $(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega))$ aus Γ eindeutig bestimmt. Außerdem ist

$$\varphi(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}ot})=[\varphi(\Gamma)]\,((X);I^*_S,\mathfrak{k},\mathfrak{l}).$$

5.9. Satz.
Die berechenbare-Abbildung-Interpretation mittels Berechnungen $\mathfrak{b}v_X$, die direkte berechenbare-Abbildung Interpretation v'_X und die berechenbare-Abbildung-Interpretation mittels Terme $v_{\mathfrak{T}}\mathcal{Y}_\pi$ von Programmen aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}ot}$ sind gleich.

5.10. Satz.
Die Mengenfamilie $\mathfrak{b}v_X(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}ot})$ der nach den Programmen aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\mathfrak{G}ot}$ berechenbaren Abbildungen ist in $((X);I^*_S,\mathfrak{k},\mathfrak{l})$ durch $\pi(\mathfrak{L})=$ $=(\{\pi_{s,\tau}(\omega);\omega\in\mathfrak{L}^s_\tau\})_{(s,\tau)\in S\times S^*}$ (s.(14),S. 47) generiert, d.h. es ist die kleinste Familie von Abbildungen

$$X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}\to X_{s_1}\times\ldots\times X_{s_n}\qquad((s_1\ldots s_n,t_1\ldots t_p)\in S^{*2}),$$

die die gegebenen Operationen

$$\pi_{s,\tau}(\omega):X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}\to X_s\qquad(\omega\in\mathfrak{L}^s_\tau,\ (s,\tau)\in S\times S^*,\ \tau=t_1\ldots t_p)$$

und die Projektionen

$$(i^*_p,t_i,\tau):X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}\to X_{t_i}:(x_1,\ldots,x_p)\mapsto x_i\ (i\in[p],\ \tau=t_1\ldots t_p\in S^*)$$

enthält, und die gegenüber dem Produkt (51),S.56 und Tupeln (52), S.56 derartiger Abbildungen abgeschlossen ist.

5.9. Programm-Interpretation der Schemata aus $\mathcal{S}_\Omega$, $\mathcal{S}_\Omega^{sf}$ bzw. $\mathcal{S}_\Omega^{sf,t}$ (Fall Programmberechnungen)

Seien $\Omega = \bigcup_{s\in S,\tau\in S^*} \Omega_\tau^s$ eine Zeichenmenge, $X=(X_s)_{s\in S}$ eine Mengenfamilie und sei

(77) $\pi=(\pi_{s,\tau})_{(s,\tau)\in S\times S^*}$

eine Familie von Abbildungen mit der Eigenschaft, daß für $(s,\tau)\in S\times S^*$, $\tau=t_1\ldots t_p$ die Abbildung $\pi_{s,\tau}$ jedem Zeichen $\omega\in\Omega_\tau^s$ eine partielle Abbildung

(78) $\pi_{s,\tau}(\omega): X_s \to \{(x,i); x\in X_{t_i},\ i\in[p]\}$

zuordnet (für $\tau=\varepsilon$ ist es die leere part. Abbildung $\pi_{s,\varepsilon}(\omega)=\emptyset: X_s \to \emptyset$). Wir bezeichnen für jedes $(s,\tau)\in S\times S^*$ $\Gamma_\tau^s := \{(\omega, \pi_{s,\tau}(\omega)); \omega\in\Omega_\tau^s\}$ und setzen

(79) $\Gamma := \bigcup_{s\in S,\tau\in S^*} \Gamma_\tau^s$.

Die Menge Γ betrachten wir als eine neue Zeichenmenge. Sei $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{S\cup S\times\{0\}}$ die Zeichenmenge, die aus Γ durch Adjunktion von $S\cup S\times\{0\}$ entsteht (vgl.(3),S.2).

Seien jetzt $b\in S_\Omega(\sigma,\tau)$ ein Schema über Ω vom Typ (σ,τ), $\sigma,\tau\in S^*$, und $B=(K,e,a,\gamma)$ ein Repräsentant von b. Wir ordnen dem Berechnungsgraphen B über Ω vom Typ (σ,τ) den Berechnungsgraphen $p(B)=(K,e,a,\gamma')$ über Γ vom gleichen Typ zu, mit der Abbildung γ' definiert durch

$\gamma'(k) := ((\omega, \pi_{s,\tau}(\omega)), k_1,\ldots,k_m)$ falls $\gamma(k)=(\omega, k_1,\ldots,k_m)$, $\omega\in\Omega_\tau^s$, $(s,\tau)\in S\times S^*$,

$\gamma'(k) := \gamma(k)$ sonst für $k\in K$.

Es ist klar, daß für zwei isomorphe Repräsentanten B,B' von b die Berechnungsgraphen $p(B),p(B')$ über Γ isomorph sind. Ist B schleifenfrei bzw. schleifenfrei total, so ist auch p(B) schleifenfrei bzw. schleifenfrei total.

Definition.
Die Programm-Interpretation der Schemata aus $\mathcal{S}_\Omega$ induziert durch π ist die Interpretation

$$\mathcal{P}: \mathcal{S}_\Omega \to \mathcal{S}_\Gamma : B \mapsto p(B).$$

Analog für $\mathcal{S}_\Omega^{sf}$ bzw. $\mathcal{S}_\Omega^{sf,t}$. Die Bedeutung eines Schemas b über Ω unter der Interpretation $\mathcal{P}$ heißt das Programm von b.

$\mathcal{P}$ ist offensichtlich ein Isomorphismus $(\mathcal{S}_\Omega; I_S, \mathcal{P}, \mathcal{A}, \mathcal{L}) \to (\mathcal{S}_\Gamma; I_S, \mathcal{P}, \mathcal{A}, \mathcal{L})$

bzw. $(\mathcal{S}_\Omega^{sf};I_S,\not{r},\lambda,\iota)\to(\mathcal{S}_\Gamma^{sf};I_S,\not{r},\lambda,\iota)$ bzw. analog für $\mathcal{S}_\Omega^{sf,t}$.

5.10. Berechnung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{S}_\Gamma$ (Fall Programmberechnungen)

Seien Ω,X,π und Γ wie im letzten Abschnitt. Seien $c\in S_\Gamma(\sigma,\tau)$ ein Programm aus $\mathcal{S}_\Gamma$ vom Typ (σ,τ), $\sigma=s_1\ldots s_n,\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, und $C=(K,e,a,\gamma)$ ein Repräsentant von c. C ist also ein Berechnungsgraph über Γ vom Typ (σ,τ) mit $\overline{C}=c$.

Sei $k\in K$ ein Knoten von C mit einer Marke vom Eingangstyp $s\in S$, und sei x ein Element aus X_s. Der Berechnungslauf vom Knoten k in C für das Argument x ist eine endliche oder unendliche Folge

(80) $\alpha=((x_0,u_0),k_1,(x_1,u_1,i_1),k_2,(x_2,u_2,i_2),\ldots,k_j,(x_j,u_j,i_j),\ldots)$

bzw.

(81) $\alpha=((x_0,u_0),k_1,(x_1,u_1,i_1),\ldots,k_j,(x_j,u_j,i_j),\ldots,k_q,i_q)$, $q\geq 1$,

bzw.

(82) $\alpha=((x_0,u_0),k_1,(x_1,u_1,i_1),\ldots,k_j,(x_j,u_j,i_j),\ldots,k_q)$, $q\geq 1$,

$k_1=k$, $u_0=s$, $x_0=x$, $k_1,k_2,\ldots\in K$, $u_0,u_1,u_2,\ldots\in S$, $x_0\in X_{u_0},x_1\in X_{u_1}$, $x_2\in X_{u_2},\ldots$, $i_1,i_2,\ldots$ $\mathbb{N}_\infty$ die auf folgende Weise rekursiv definiert ist:
ist $j\in\mathbb{N}$ und sind k_j,u_{j-1} und x_{j-1} definiert, so gelte:

(83) ist $\gamma(k_j)=((\omega,\pi_{u_{j-1},\varsigma}(\omega)),\ l_1,l_2,\ldots,l_{m_j})$ mit gewissen $\omega\in\Omega_\varsigma^{u_{j-1}}$, $\varsigma=r_1\ldots r_{m_j}\in S^+$, $m_j\geq 1$, $l_i\in K$ $(i\in[m_j])$, ist $\pi_{u_{j-1},\varsigma}(\omega)$ im Punkt x_{j-1} definiert, und ist $\pi_{u_{j-1},\varsigma}(\omega)(x_{j-1})=(y,i)\in X_{r_i}\times[m_j]$, so sei

$i_j:=i$, $u_j:=r_i$, $x_j:=y$ und $k_{j+1}:=l_i$;

(84) ist $\gamma(k_j)=((\omega,\pi_{u_{j-1},\varsigma}(\omega)),\ l_1,l_2,\ldots,l_{m_j})$ mit gewissen $\omega\in\Omega_\varsigma^{u_{j-1}}$, $\varsigma=r_1\ldots r_{m_j}\in S^*$, $m_j\geq 0$, $l_i\in K$ $(i\in[m_j])$, und ist $\pi_{u_{j-1},\varsigma}(\omega)$ im Punkt x_{j-1} undefiniert, so sei

$i_j:=0$ und u_j,x_j,k_{j+1} seien undefiniert;

(85) ist $\gamma(k_j)=((u_{j-1},0))$, so sei

$i_j:=0$ und u_j,x_j,k_{j+1} seien undefiniert;

(86) ist $\gamma(k_j)=((u_{j-1}))$, so seien i_j, u_j, x_j und k_{j+1} undefiniert.

Offensichtlich sind entweder für jedes $j\in\mathbb{N}$ die Voraussetzungen von (83) erfüllt und man erhält eine unendliche Folge (80), oder existiert ein $j=q\geq 1$ s.d. die Voraussetzungen von (84),(85) oder (86) erfüllt sind und man erhält eine endliche Folge (81) oder (82). Zusätzlich wollen wir jede endliche Teilfolge

$$(87)\quad \alpha=((x_0,u_0),k_1,(x_1,u_1,i_1),k_2,(x_2,u_2,i_2),\ldots,k_j,(x_j,u_j,i_j),\ldots,k_{q'}),\ q'\geq 2,$$

von (80),(81) oder (82) als einen Berechnungslauf vom Knoten $k=k_1$ in C für das Argument $x=x_0$ betrachten.

Zur Illustration vergleichen wir die Berechnungsläufe mit den Wegen in Berechnungsgraphen über einer Zeichenmenge in §2, Abschnitt 2.3 (S.5). Man könnte einen Berechnungslauf (80),(81), (82) oder (87) als einen „Weg" in unserem Berechnungsgraphen $C=(K,e,a,\gamma)$ über Γ bezeichnen, der vom Knoten $k=k_1$ ausgeht und dessen weiterer Verlauf durch das vorgegebene Argument $x=x_0\in X_{u_0}$ und durch die den Knoten von C zugeordneten part. Abbildungen $\pi_{u,\varsigma}(\omega)$ eindeutig bestimmt ist: ist der Berechnungslauf mit einem „Zwischenergebnis" $x_{j-1}\in X_{u_{j-1}}$ zu einem Knoten k_j angelangt, $j\in\mathbb{N}$, der mit einem Paar $(\omega,\pi_{u_{j-1},\varsigma}(\omega))$ markiert ist und gewisse Knoten $l_1,l_2,\ldots,l_{m_j}$ als seine direkten Nachfolger hat, und ist

$$(88)\quad \pi_{u_{j-1},\varsigma}(\omega)(x_{j-1})=(y,i),$$

so ist $x_j:=y$ das nächste Zwischenergebnis und der Weg geht zu dem i-ten direkten Nachfolger l_i von k weiter. (Wir erinnern daran, daß für $(u_{j-1},\varsigma)\in S\times S^+$, $\varsigma=r_1\ldots r_{m_j}$ $\pi_{u_{j-1},\varsigma}(\omega)$ eine „heterogene Instruktion mit m_j möglichen Ausgängen" ist,

$$\pi_{u_{j-1},\varsigma}(\omega): X_{u_{j-1}} \longrightarrow \{(x,i);\ x\in X_{r_i},\ i\in[m_j]\},$$

i.a. partiell, die jedem Argument x aus dem Definitionsbereich in $X_{u_{j-1}}$ einen der m_j möglichen „Wahrheitswerte" $i\in[m_j]$ zuordnet und (gegebenfalls) das Argument x in ein anderes Element y in X_{r_i} überführt, wie es in der Einleitung beschrieben wurde.) Von einer endlichen Folge (87) (bei der also für jedes $j\in[q']$ der Fall (83) eintritt) sagen wir, daß α ein Berechnungslauf in C von k_1 nach $k_{q'}$ ist; k_1 heißt der Anfang von α, $k_{q'}$ das Ende von α, die Zahl $q'-1$ ist die Länge von α. Das Element $x_0\in X_{u_0}$ nennen wir das Argument von α, u_0 ist der Argumenttyp von α, $x_{q'-1}\in X_{u_{q'-1}}$ heißt das Ergebnis und $u_{q'-1}$ der Ergebnistyp von α. Das Paar

$$(89)\quad v_B(\alpha)=(v_B^{(1)}(\alpha),v_B^{(2)}(\alpha)):=(x_0,x_{q'-1})$$

heißt das (Berechnungslauf-)Verhalten von α, das Paar $(u_0,u_{q'-1})$ ist der Typ von α.

Gleiche Terminologie verwenden wir bei einem Berechnungslauf (82), mit $q'=q$ (wenn also für jedes $j\in[q-1]$ der Fall (83) und für $j=q$ der Fall (86) eintritt; nach (8)(b),S.3 ist es genau dann, der letzte Knoten k_q des Berechnungslaufes (82) ein Ausgang von C ist).

Unter Umständen kann der Berechnungslauf vom Knoten $k=k_1$ in C für das Argument $x=x_0\in X_{u_0}$ zu einem Knoten k_q mit einem Zwischenergebnis $x_{q-1}\in X_{u_{q-1}}$ kommen, $q\geq 1$, das auserhalb des Definitionsbereiches der zugeordneten part. Abbildung (88) liegt (d.h. für jedes $j\in[q-1]$ tritt der Fall (83) und für $j=q$ der Fall (84) ein); der Berechnungslauf bricht dann im k_q ab und ist von der Gestalt (81) mit $i_q=0$. Wenn der Berechnungslauf vom Knoten $k=k_1$ in C für das Argument $x=x_0\in X_{u_0}$ zu einem Nullknoten k_q von C kommt, $q\geq 1$ (d.h. wenn für $j=q$ der Fall (85) oder der Fall (84) mit $\gamma(k_q)=$ $=((\omega,\pi_{u_{q-1},\varepsilon}(\omega)),\ \omega\in\Omega_\varepsilon^{u_{q-1}}$, eintritt), so ist er ebenfalls von der Gestallt (81), mit $i_q=0$. Es kann aber auch passieren, daß unser Weg im Berechnungsgraphen C über Γ beliebig lange fortgesetzt werden kann ohne dabei zu einem Ausgang oder Nullknoten von C zu kommen und ohne daß ein Zwischenergebnis außerhalb des Definitionsbereichs der nächsten Instruktion gerät (d.h. es tritt für jedes $j\in\mathbb{N}$ bei dem Berechnungslauf vom Knoten $k=k_1$ in C für das Argument $x=x_0\in X_{u_0}$ der Fall (83) ein); α ist dann unendlich, von der Gestalt (80). In allen diesen Fällen nennen wir α einen Berechnungslauf ohne Ergebnis; der Knoten k_1 heißt der Anfang von α, das Element $x_0\in X_{u_0}$ ist das Argument von α, u_0 ist der Argumenttyp von α, und ebenfalls in allen drei Fällen betrachten wir das Paar $(u_0,0)\in S\times\{0\}$ als den Typ des Berechnungslaufes α. Ist α von der Gestalt (81), so heißt die Zahl q-1 die Länge von α.

Ähnlich wie bei den algebraischen Berechnungen wollen wir jedem Berechnungsgraphen über Γ die Menge aller Berechnungsläufe von seinen Eingängen für alle Argumente als die zugehörige Berechnung zuordnen. Zunächst nehmen wir an, daß $C=(K,e,a,\gamma)$ vom Typ (σ,τ), $\sigma=s_1\ldots s_n,\tau=t_1\ldots t_p\in S^+$ ist. Jeder Berechnungslauf vom i-tem Eingang zum j-ten Ausgang von C ist vom Typ (s_i,t_j) $(i\in[n],$ $j\in[p])$, jeder Berechnungslauf ohne Ergebnis vom i-ten Eingang in C ist vom Typ $(s_i,0)$ $(i\in[n])$. Wir ordnen die Berechnungsläufe in C zu einem Paar

(90) $\left(\left(\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_n\end{pmatrix},\sigma,0\right);\left(\begin{pmatrix}B_{11}B_{12}\ldots B_{1p}\\B_{21}\\\vdots\\B_{n1}\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\\ldots B_{np}\end{matrix},\sigma,\tau\right)\right)$,

wo A_i die Menge aller Berechnungsläufe ohne Ergebnis vom i-ten Eingang in C ist ($i\in[n]$), und B_{ij} die Menge aller Berechnungsläufe vom i-ten Eingang zum j-ten Ausgang in C ist ($i\in[n]$, $j\in[p]$). Man sieht die Analogie zu den Untersuchungen des freien äußeren Verhaltens von Berechnungsgraphen in §§2,3. Analog wie dort versehen wir auch die Matrizen der Art (90) mit einer algebraischen Struktur. Für Zwecke dieses Paragraphen definieren wir:

Seien S eine nichtleere Menge und $X=(X_s)_{s\in S}$ eine Mengenfamilie wie früher, sei K eine endliche Menge. Wir bezeichnen für jedes $(s,t)\in S^2$ mit

$$F_K(s,t)$$

die Menge aller endlichen Folgen

(91) $\alpha=((x_0,u_0),k_1,(x_1,u_1,i_1),k_2,(x_2,u_2,i_2),\ldots,k_{q-1},(x_{q-1},u_{q-1},i_{q-1}),k_q)$

mit $q\geq 1$, $u_0=s$, $u_{q-1}=t$, $k_1,k_2,\ldots,k_q\in K$, $u_0,u_1,\ldots,u_{q-1}\in S$, $x_0\in X_{u_0}, x_1\in X_{u_1},\ldots,x_{q-1}\in X_{u_{q-1}}$, $i_1,i_2,\ldots,i_{q-1}\in\mathbb{N}$, (vgl.(82),S.65). Für jedes $s\in S$ bezeichnen wir mit

$$F_K(s,0)$$

die Menge aller unendlichen uder endlichen Folgen

(92) $\alpha=((x_0,u_0),k_1,(x_1,u_1,i_1),k_2,(x_2,u_2,i_2),\ldots,k_j,(x_j,u_j,i_j),\ldots)$

bzw.

(93) $\alpha=((x_0,u_0),k_1,(x_1,u_1,i_1),k_2,(x_2,u_2,i_2),\ldots,k_q,0)$, $q\geq 1$,

mit $u_0=s$, $k_1,k_2,\ldots\in K$, $u_0,u_1,u_2,\ldots\in S$, $x_0\in X_{u_0}, x_1\in X_{u_1}, x_2\in X_{u_2},\ldots$, $i_1,i_2,\ldots\in\mathbb{N}$ (vgl.(80),(81),S.65).

Sind $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$ und gilt $B_{ij}\subseteq F_K(s_i,t_j)$ ($i\in[n]$, $j\in[p]$), so heißt das Tripel

$$(\langle\!\langle B_{ij}\rangle\!\rangle,\sigma,\tau)$$

eine $(n\times p)$-K-Matrix über X vom Typ (σ,τ). Ist $\sigma=s_1\ldots s_n\in S^*$ und

gilt $A_i \subseteq F_K(s_i,0)$ $(i\in[n])$, so heißt das Tripel

$$(\!(A_i)\!),\sigma,0)$$

eine $(n\times 1)$-K-Matrix über X vom Typ $(\sigma,0)$. Im Falle $\sigma=\varepsilon$ oder $\tau=\varepsilon$ definieren wir die K-Matrix über X vom Typ (σ,τ) bzw. $(\sigma,0)$ wie in §2,S.9.

Sind K,K' endliche Mengen, $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$, ist $a=(\!(A_{ij})\!),\sigma,\tau)$ bzw. $a=(\!(A_i)\!),\sigma,0)$ eine k-Matrix über X vom Typ (σ,τ) bzw. $(\sigma,0)$ und ist $a'=(\!(A'_{ij})\!),\sigma,\tau)$ bzw. $a'=(\!(A'_i)\!),\sigma,0)$ eine K-Matrix über X vom gleichen Typ, so heißen a und a' isomorph, wenn eine Bijektion $\varphi:K\to K'$ existiert mit der Eigenschaft

$$(\alpha=((x_0,u_0),k_1,(x_1,u_1,i_1),\ldots,k_{q-1},(x_{q-1},u_{q-1},i_{q-1}),k_q)\in A_{ij} \iff$$

$$\iff \beta=((x_0,u_0),\varphi k_1,(x_1,u_1,i_1),\ldots,\varphi k_{q-1},(x_{q-1},u_{q-1},i_{q-1}),\varphi k_q)\in A'_{ij})$$

$(i\in[n],\ j\in[p])$

bzw.

$$(\alpha=((x_0,u_0),k_1,(x_1,u_1,i_1),\ldots,k_j,(x_j,u_j,i_j),\ldots) \text{ bzw.}$$

$$\alpha=((x_0,u_0),k_1,(x_1,u_1,i_1),\ldots,k_q,0) \text{ in } A_i \iff$$

$$\iff \beta=((x_0,u_0),\varphi k_1,(x_1,u_1,i_1),\ldots,\varphi k_j,(x_j,u_j,i_j),\ldots) \text{ bzw.}$$

$$\beta=((x_0,u_0),\varphi k_1,(x_1,u_1,i_1),\ldots,\varphi k_q,0) \text{ in } A'_i) \quad (i\in[n]).$$

Ähnlich wie früher können wir offensichtlich die Isomorphieklassen von K-Matrizen über X mit endlichen Mengen K durch die natürlichen Zahlen n:=card(K) und partielle Abbildungen $\mathbb{N}\to[n]$ charakterisieren; wir nennen jede Isomorphieklasse eine Matrix über X. Den Begriff Typ übertragen wir auf Metrizen über X von ihren Repräsentanten. Künftig bezeichnen wir mit $\bar{a}$ die Isomorphieklasse der K-Matrix a über X, K eine endliche Menge. Für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$ bezeichnen wir mit

$$(\!(X)\!)(\sigma,\tau)$$

die Menge aller Matrizen über X vom Typ (σ,τ), für jedes $\sigma\in S^*$ sei

$$(\!(X)\!)(\sigma,0)$$

die Menge aller Matrizen über X vom Typ $(\sigma,0)$.

Seien jetzt $c\in S_\Gamma(\sigma,\tau)$ ein Programm aus $\mathcal{P}_\Gamma$ vom Typ (σ,τ), $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, und $C=(K,e,a,\gamma)$ ein Repräsentant von c. Wir bezeichnen für jedes $i\in[n]$ und jedes $x\in X_{s_i}$ mit

(94) $\alpha_{i,x}$

den Berechnungslauf vom Eingang e_i in C für das Argument x (s.

(80),(81),(82),S.65). Für die Matrixelemente in (90),S.68 gilt $A_i \subseteq F_K(s_i,0)$, $B_{ij} \subseteq F_K(s_i,t_j)$ ($i\in[n]$, $j\in[p]$). Für jedes $i\in[n]$ ist die Menge aller Berechnungsläufe vom Eingang e_i in C die disjunkte Zerlegung

(95) $\{\alpha_{i,x}; x\in X_{s_i}\} = A_i \cup B_{i1} \cup B_{i2} \cup \ldots \cup B_{ip}$.

Wir nennen das Paar

(96) $b(C) = (\overset{(1)}{b}(C), \overset{(2)}{b}(C)) := (((A_i)), \sigma, 0); (((B_{ij})), \sigma, \tau)$

der K-Matrizen über X die Berechnung von C.

Unmittelbar aus den Definitionen zweier isomorphen Berechnungsgraphen (s.S.4) und zweier isomorphen K- und K'-Matrizen über X, K,K' endliche Mengen, folgt, das für jeden zweiten Repräsentanten C' von c die ersten bzw. die zweiten Komponenten der Berechnungen von C und C' jeweils isomorph sind. Wir können daher definieren: Die Berechnung des Programms c ist

(97) $b(c) := (\overline{\overset{(1)}{b}(C)}, \overline{\overset{(2)}{b}(C)}) \in ((X))(\sigma,0) \times ((X))(\sigma,\tau)$.

Definition.
Die Berechnung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{S}_\Gamma$ ist die Interpretation

(98) $\mathcal{A}: \mathcal{S}_\Gamma \to (((X))(\sigma,0) \times ((X))(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}} : c \mapsto b(c)$.

Sei $i\in[n]$. Wenn x die Menge X_{s_i} durchläuft, so ist der zugehörige Berechnungslauf $\alpha_{i,x}$ (94) in unserem Berechnungsgraphen C über Γ entweder ohne Ergebnis, oder es gibt genau einen Ausgang a_j von C, $j\in[p]$, so daß $\alpha_{i,x}$ ein Berechnungslauf von e_i nach a_j ist, mit gewissem $y\in X_{t_j}$ als Ergebnis (s.(95)). Im letzteren Fall ordnen wir das Paar (y,j) als Funktionswert dem Paar (x,i) zu, wodurch eine part. Abbildung

$$\{(x,i); x\in X_{s_i},\ i\in[n]\} \to \{(y,j); y\in X_{t_j},\ j\in[p]\}$$

definiert ist; für Paare (x,i), deren Berechnungslauf $\alpha_{i,x}$ in C ohne Ergebnis ist, bleibt die Abbildung undefiniert. Wir bezeichnen diese part. Abbildung mit

(99) $v_{[X]}(b(c))$,

da sie offensichtlich von der Wahl des Repräsentanten C des Programms c unabhängig ist, und nennen sie das äußere Verhalten der Berechnung b(c).

Seien $\omega\in\Omega_\tau^S$, $s\in S$, $\tau = t_1 \ldots t_p \in S^*$, $\pi_{s,\tau}(\omega)$ die zugeordnete part.

Abbildung (s.(78),S.64) und $\gamma=(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega))\in f_\tau^S$ das zugehörige Zeichen aus Γ, und sei B_γ der dem Zeichen γ zugeordnete Berechnungsgraph über Γ (s.(4),S.12). Ist $x\in X_s$ im Definitionsbereich von $\pi_{s,\tau}(\omega)$ und ist $\pi_{s,\tau}(\omega)(x)=(y,j)$, $y\in X_{t_j}$, $j\in[p]$, so ist der Berechnungslauf von dem (einzigen) Eingang e_1 in B_γ für das Argument x

$$\alpha_{1,x}=((x,s),e_1,(y,t_j,j),a_j);$$

er ist von der Gestalt (82), mit Ende in dem j-ten Ausgang a_j von B_γ und mit dem Ergebnis y. Ist $x\in X_s$ außerhalb des Definitionsbereichs von $\pi_{s,\tau}(\omega)$, so ist

$$\alpha_{1,x}=((x,s),e_1,0);$$

es ist ein Berechnungslauf in B_γ ohne Ergebnis. Nach der obigen Definition ist das äußere Verhalten der Berechnung des Programms $\overline{B_\gamma}=\gamma$ in $\mathfrak{F}_\Gamma$ die part. Abbildung

$$v_{[x]}(b(\gamma)):\{(x,i);x\in X_s,i\in[1]\}\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}:$$
$$:(x,1)\mapsto\pi_{s,\tau}(\omega)(x)\text{ falls }\pi_{s,\tau}(\omega)(x)\text{ definiert ist,}$$
$$\text{undefiniert sonst.}$$

Wir identifizieren in Zukunft für jede Menge M die Mengen $\{(x,1);x\in M\}$ und M, auf offensichtliche Weise. Es ergibt sich dann

(100) $v_{[x]}(b(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega)))=\pi_{s,\tau}(\omega)\quad(\omega\in\Omega_\tau^S,\ (s,\tau)\in S\times S^*).$

Seien $(f:[n]\to[p],\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_{S,P}(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, und $B_{f,\sigma,\tau}$ der zugehörige Berechnungsgraph über Γ. Zur Erinnerung wiederholen wir:

f ist eine part. Abbildung $[n]\to[p]$;
für σ und τ gilt $(\sigma,\tau)\in\hat{f}$, d.h. ist $f(i)=j$, $i\in[n]$, $j\in[p]$, so ist $s_i=t_{f(i)}$;
sind $0<i_1<i_2<\ldots<i_r\leq n$ alle Elemente aus $[n]$, die nicht im Definitionsbereich D_f von f liegen, so ist $B_{f,\sigma,\tau}$ ein Berechnungsgraph (K,e,a,γ) über Γ vom Typ (σ,τ) mit $K=[p+r]$, $e_i=f(i)$ $(i\in D_f)$, $e_{i_k}=p+k$ $(k\in[r])$, $a=id_{[p]}$, $\gamma(j)=(t_j)$ $(j\in[p])$, $\gamma(j+k)=((s_{i_k},0))$ $(k\in[r])$.

Ist $i\in[n]$ im Definitionsbereich D_f von f und ist $x\in X_{s_i}$, so ist der Berechnungslauf vom Eingang e_i in $B_{f,\sigma,\tau}$ für das Argument x

(101) $\alpha_{i,x}=((x,s_i),e_i)\quad\text{mit }e_i=a_{f(i)};$

es ist ein Berechnungslauf (82),S.65 der Länge Null mit Ende im f(i)-ten Ausgang $a_{f(i)}$ von $B_{f,\sigma,\tau}$ und mit dem Ergebnis x.

Ist $i=i_k$, $k\in[r]$, d.h. ist i außerhalb D_f, und ist $x\in X_{s_i}$, so ist

(102) $\alpha_{i,x}=((x,s_i),e_i,0)$

ein Berechnungslauf in $B_{f,\sigma,\tau}$ ohne Ergebnis. Die Berechnung von $B_{f,\sigma,\tau}$ ist das Paar von $[p+r]$-Matrizen über X

$$((A_{\overline{D_f}},\sigma,0);(A_f,\sigma,\tau))$$

mit der $(n\times 1)$-Matrix $A_{\overline{D_f}}=(\!(A_i)\!)$ definiert durch

(103) $A_{i_k}:=\{((x,s_{i_k}),e_{i_k},0);x\in X_{s_{i_k}}\}$

$A_i:=\emptyset$ sonst für $i\in[n]$,

und mit der $(n\times p)$-Matrix $A_f=(\!(A_{f,ij})\!)$ definiert durch

(104) $A_{f,ij}:=\{((x,s_i),a_j);x\in X_{s_i}\}$ falls $f(i)=j$

$A_{f,ij}:=\emptyset$ sonst $\quad (i\in[n],\ j\in[p])$.

Sind $\sigma\in S^n$, $\tau\in S^p$, $n,p\geq 0$, und sind $f,f':[n]\to[p]$ zwei verschiedene part. Abbildungen mit $(\sigma,\tau)\in\widehat{f}$, $(\sigma,\tau)\ \widehat{f'}$, so sind offensichtlich die Matrizen über X

$$(\overline{A_f,\sigma,\tau}),\ (\overline{A_{f'},\sigma,\tau})\in(\!(X)\!)(\sigma,\tau)$$

verschieden, wenn jede der Mengen X_s $(s\in S)$ nichtleer ist; wir betten dann $\mathfrak{G}_{S,P}$ mittels

(105) $(f,\sigma,\tau)\mapsto((\overline{A_{\overline{D_f}},\sigma,0});(\overline{A_f,\sigma,\tau}))$

in $((\!(X)\!)(\sigma,0)\times(\!(X)\!)(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ komponentenweise ein. Im allgemeinen ist (105) keine komponentenweise Injektion. Wir bezeichnen mit

(106) (f^b,σ,τ)

das Abbild von (f,σ,τ) unter (105) in $(\!(X)\!)(\sigma,0)\times(\!(X)\!)(\sigma,\tau)$ und setzen

$$\mathfrak{G}^b_{S,P}(\sigma,\tau):=\{(f^b,\sigma,\tau);\ (f,\sigma,\tau)\in\mathfrak{G}_{S,P}(\sigma,\tau)\}\quad((\sigma,\tau)\in S^{*2})\quad\text{und}$$

(107) $\mathfrak{G}^b_{S,P}:=(\mathfrak{G}^b_{S,P}(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$.

Analog dazu definieren wir $\mathfrak{G}^b_{S,F}$ und $I^b_S=\mathfrak{G}^b_{S,F}|_{S\times S^+}$.

Aus (101),(102),(103),(104) ergibt sich für die Berechnung des Programms $\overline{B_{f,\sigma,\tau}}=(f,\sigma,\tau)$ aus $\mathfrak{F}_r$

(108) $b(f,\sigma,\tau)=(f^b,\sigma,\tau)$ in $(\!(X)\!)(\sigma,0)\times(\!(X)\!)(\sigma,\tau)$.

Ihr äußeres Verhalten

(109) $v_{[X]}(b(f,\sigma,\tau)):\{(x,i);x\in X_{s_i},i\in[n]\}\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}$

ordnet nach (101),(102) dem Paar (x,i) das Paar (x,f(i)) genau dann, wenn $i\in[n]$, $x\in X_{s_i}$ sind und wenn f(i) definiert ist, d.h. $i\in D_f$; in diesem Fall ist $s_i=t_{f(i)}$.

Wir möchten Folgendes anmerken:
Ist $c=(\overline{K,e,a,\gamma})\in S_\Gamma(s,\tau)$, $s\in S$, $\tau=t_1\dots t_p\in S^+$, und ist $e_1=a_j$, $j\in[p]$, so ist offensichtlich

(110) $v_{[X]}(b(c)):X_s\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}:x\mapsto(x,j)$,

und das ist genau das äußere Verhalten $v_{[X]}(b(j_p,s,\tau))$ der Berechnung des Programms $\overline{B_{j_p,s,\tau}}=(j:[1]\to[p],s,\tau)\in I_S(s,\tau)$ in Ψ_Γ.

Seien $\varsigma=r_1\dots r_m$, $\sigma=s_1\dots s_n$, $\tau=t_1\dots t_p$ aus S^*, $a=(a^{(1)},a^{(2)})\in(\!(X)\!)(\varsigma,0)\times$ $\times(\!(X)\!)(\varsigma,\sigma)$, $c=(c^{(1)},c^{(2)})\in(\!(X)\!)(\sigma,0)\times(\!(X)\!)(\sigma,\tau)$, seien

(111) $(A^{(1)},\varsigma,0)$ bzw. $(A^{(2)},\varsigma,\sigma)$

eine (m×1)- bzw. (m×n)-K_A-Matrix über X mit $\overline{(A^{(1)},\varsigma,0)}=a^{(1)}$ bzw. $\overline{(A^{(2)},\varsigma,\sigma)}=a^{(2)}$, K_A endliche Menge, und

(112) $(C^{(1)},\sigma,0)$ bzw. $(C^{(2)},\sigma,\tau)$

eine (n×1)- bzw. (n×p)-K_B-Matrix über X mit $\overline{(C^{(1)},\sigma,0)}=c^{(1)}$ bzw. $\overline{(C^{(2)},\sigma,\tau)}=c^{(2)}$, K_B endliche Menge, und die Mengen K_A und K_B seien disjunkt. Wir definieren das Produkt

$$((A^{(1)},\varsigma,0);(A^{(2)},\varsigma,\sigma))((C^{(1)},\sigma,0);(C^{(2)},\sigma,\tau)):=((A^{(1)}+A^{(2)}C^{(1)},\varsigma,0);(A^{(2)}C^{(2)},\varsigma,\tau))$$

als das Paar, das aus der $(m\times1)$-$(K_A\cup K_C)$-Matrix

(113) $((A^{(1)}+A^{(2)}C^{(1)},\varsigma,0)$

über X und aus der (m×p)-$(K_A\cup K_B)$-Matrix

(114) $(A^{(2)}C^{(2)},\varsigma,\tau)$

über X besteht, definiert durch

(115) $(A^{(2)}C^{(2)})_{ij}:=\bigcup_{k\in[n]}A^{(2)}_{ik}C^{(2)}_{kj}\subseteq F_{K_A\cup K_C}(r_i,t_j)$ $(i\in[m],\ j\in[p])$ mit

(116) $A^{(2)}_{ik}C^{(2)}_{kj}:=\{\alpha\in F_{K_A\cup K_C}(r_i,t_j);\exists\alpha'\in A^{(2)}_{ik}\subseteq F_{K_A\cup K_C}(r_i,s_k),\exists\alpha''\in C^{(2)}_{kj}\subseteq$
$\subseteq F_{K_A\cup K_C}(s_k,t_j):\alpha=\alpha'\alpha''\}$

bzw.

(117) $(A^{(2)}C^{(2)},\varsigma,\tau):=(\emptyset:[m]\to[p],\varsigma,\tau)$ falls $\varsigma=\varepsilon$ oder $\sigma=\varepsilon$ oder $\tau=\varepsilon$,

und

$$(A^{(1)}+A^{(2)}C^{(1)})_j := A_j^{(1)} \cup (A^{(2)}C^{(1)})_j = A_j^{(1)} \cup \bigcup_{k\in[n]} A_{jk}^{(2)} C_k^{(1)} \quad (j\in[m]);$$

wir benutzen dabei in (116) die part. Operation

(118) $F_K(v,w)\times F_K(w,z) \to F_K(v,z) : (\alpha,\beta)\mapsto \alpha\beta$,

K endliche Menge, $v,w\in S$, $z\in S\cup\{0\}$, definiert genau dann, wenn

$$\alpha=((x_0,u_0),k_1,(x_1,u_1,i_1),\dots,k_{q-1},(x_{q-1},u_{q-1},i_{q-1}),k_q)$$

eine endliche Folge (91), S.68 in $F_K(u,w)$ ist, wenn

$$\beta=((x_0',u_0'),k_1',(x_1',u_1',i_1'),\dots)$$

eine unendliche oder endliche Folge (92) bzw. (93), S.68 in $F_K(w,z)$ ist, und wenn

$$x_{q-1}=x_0' \quad \text{und} \quad u_{q-1}=u_0';$$

es ist dann

(119) $$\alpha\beta := ((x_0,u_0),k_1,(x_1,u_1,i_1),\dots,k_{q-1},(x_{q-1},u_{q-1},i_{q-1}),k_1',(x_1',u_1',i_1'),\dots).$$

Es ist klar daß die Isomorphieklasse der $K_A\cup K_C$-Matrix in (113) bzw. (114) von der Wahl der Repräsentanten (111) und (112) unabhängig ist, so daß wir das <u>Produkt</u> $p_{\varsigma,\sigma,\tau}$

$$p_{\varsigma,\sigma,\tau} : (\langle\!\langle X\rangle\!\rangle(\varsigma,0)\times\langle\!\langle X\rangle\!\rangle(\varsigma,\sigma))\times(\langle\!\langle X\rangle\!\rangle(\sigma,0)\times\langle\!\langle X\rangle\!\rangle(\sigma,\tau)) \longrightarrow (\langle\!\langle X\rangle\!\rangle(\varsigma,0)\times\langle\!\langle X\rangle\!\rangle(\varsigma,\tau) :$$
$$:(a,c)\longmapsto (\overline{(A^{(1)}+A^{(2)}C^{(1)},\varsigma,0)};\overline{(A^{(2)}C^{(2)},\varsigma,\tau)})$$

definieren können. Wir setzen $\mathfrak{p} := (p_{\varsigma,\sigma,\tau})_{(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}}$.

Dieses Produkt erinnert stark an das Produkt in $[\hat{\mathcal{E}}_{\mathfrak{X}}]$ in §3. Es ist nicht schwer einzusehen, das uns der Beweis des Lemmas 3.6, S.18 nach geringfügigen Modifikationen folgende Aussagen liefert: Sind $a\in S_\Gamma(\varsigma,\sigma)$, $c\in S_\Gamma(\sigma,\tau)$ Programme in $\mathcal{F}_\Gamma$, $\varsigma,\sigma,\tau\in S^*$, und sind $b(a)\in\langle\!\langle X\rangle\!\rangle(\varsigma,0)\times\langle\!\langle X\rangle\!\rangle(\varsigma,\sigma)$, $b(c)\in\langle\!\langle X\rangle\!\rangle(\sigma,0)\times\langle\!\langle X\rangle\!\rangle(\sigma,\tau)$ ihre Berechnungen, so gilt für das Programm $ac\in S_\Gamma(\varsigma,\tau)$

(120) $b(ac)=b(a)b(c)$ in $\langle\!\langle X\rangle\!\rangle(\varsigma,0)\times\langle\!\langle X\rangle\!\rangle(\varsigma,\tau)$;

für die äußeren Verhalten $v_{[X]}(b(a))$ und $v_{[X]}(b(c))$ der Berechnungen $b(a)$ und $b(c)$ und für das äußere Verhalten $v_{[X]}(b(ac))$ der Berechnung (116) gilt

(121) $v_{[X]}(b(ac))=v_{[X]}(b(a))v_{[X]}(b(c))$,

als Komposition fg (f gefolgt von g) von part. Abbildungen.

Seien $(\sigma,\tau)\in S^*\times S^*$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$, seien für jedes $i\in[n]$ $a_i=(a_i^{(1)},a_i^{(2)})\in (X)(s_i,0)\times(X)(s_i,\tau)$, und

(122) $(A_i^{(1)},s_i,0)$ bzw. $(A_i^{(2)},s_i,\tau)$

eine (1×1)- bzw. $(1\times p)$-K_i-Matrix über X mit $\overline{(A_i^{(1)},s_i,0)}=a_i$ bzw. $\overline{(A_i^{(2)},s_i,\tau)}=a_i$, K_i endliche Menge, und die Mengen $K_1,K_2,\ldots,K_n$ seien paarweise disjunkt. Wir definieren

(123) $\langle((A_1^{(1)},s_1,0);(A_1^{(2)},s_1,\tau)),\ldots,((A_n^{(1)},s_n,0);(A_n^{(2)},s_n,\tau))\rangle :=$

$$:=\left(\left(\begin{pmatrix}A_1^{(1)}\\ \vdots\\ A_n^{(1)}\end{pmatrix},\sigma,0\right);\left(\begin{pmatrix}A_1^{(2)}\\ \vdots\\ A_n^{(2)}\end{pmatrix},\sigma,\tau\right)\right);$$

es ist ein Paar, das aus einer $(n\times 1)$-$(\bigcup_{i\in[n]} K_i)$-Matrix vom Typ $(\sigma,0)$ und einer $(n\times p)$-$(\bigcup_{i\in[n]} K_i)$-Matrix vom Typ (σ,τ) über X besteht.
Die Isomorphieklasse der ersten bzw. der zweiten Komponente in (123) ist offensichtlich unabhängig von der Wahl der Repräsentanten (122) von $a_i^{(1)}$ bzw. $a_i^{(2)}$ $(i\in[n])$. Wir definieren daher

$$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle:=\left(\overline{\left(\begin{pmatrix}A_1^{(1)}\\ \vdots\\ A_n^{(1)}\end{pmatrix},\sigma,0\right)};\overline{\left(\begin{pmatrix}A_1^{(2)}\\ \vdots\\ A_n^{(2)}\end{pmatrix},\sigma,\tau\right)}\right)\in(X)(\sigma,0)\times(X)(\sigma,\tau).$$

Zusätzlich definieren wir für $\tau\in S^*$

$\langle\emptyset\rangle:=((\emptyset:[0]\to[1(\tau)])^b,\varepsilon,\tau)$ in $(X)(\varepsilon,0)\times(X)(\varepsilon,\tau)$ (s.(106),S. 72).

Wir bezeichnen für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$ mit $t_{\sigma,\tau}$ die Operation

$$((X)(s_1,0)\times(X)(s_1,\tau))\times\ldots\times((X)(s_n,0)\times(X)(s_n,\tau))\longrightarrow(X)(\sigma,0)\times(X)(\sigma,\tau):$$

$$:(a_1,\ldots,a_n)\mapsto\langle a_1,\ldots,a_n\rangle;$$

die Familie $\mathcal{A}:=(t_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ nennen wir das Tupeln in $((X)(\sigma,0)\times(X)(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$.

Unmittelbar aus der Definition des Tupelns von Berechnungsgraphen über Γ (s.S.21) und aus der Definition der Berechnung eines Programms aus $\mathcal{Y}_\Gamma$ und ihres äußeren Verhaltens ergibt sich:
Sind $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, sind $c_i\in S_\Gamma(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$ Programme aus $\mathcal{Y}_\Gamma$, $b(c_i)\in(X)(s_i,0)\times(X)(s_i,\tau)$ ihre Berechnungen und $v_{[X]}(b(c_i)):X_{s_i}\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}$ ihre äußeren Verhalten, so gilt für

das Programm $c=\langle c_1,\dots,c_n\rangle\in S_\Gamma(\sigma,\tau)$

(124) $b(c)=\langle b(c_1),\dots,b(c_n)\rangle$ in $(\!(X)\!)(\sigma,0)\times(\!(X)\!)(\sigma,\tau)$ und

(125) $v_{[X]}(b(c))=\langle v_{[X]}(b(c_1)),\dots,v_{[X]}(b(c_n))\rangle : \{(x,i);x\in X_{s_i},i\in[n]\}\to$
$\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\} : (x,i)\mapsto v_{[X]}(b(c_i))(x)$.

Seien $s\in S$, $\tau=t_1\dots t_p\in S^*$, $a=(a^{(1)},a^{(2)})\in(\!(X)\!)(s,0)\times(\!(X)\!)(s,\tau s)$, $a\neq$ $\neq((p+1:[1]\to[p+1])^b,s,\tau s)\in I_S(s,\tau s)$ (s.(106),S.72), und sei

(126) $(A^{(1)},s,0)$ bzw. $(A^{(2)},s,\tau s)$

eine (1×1)- bzw. (1×(p+1))-K-Matrix über X mit $\overline{(A^{(1)},s,0)}=a^{(1)}$ bzw. $\overline{(A^{(2)},s,\tau s)}=a^{(2)}$, K endliche Menge. Wir definieren die Iteration

(127) $((A^{(1)},s,0);(A^{(2)},s,\tau s))^+:=((A^{(2)*}_{p+1}A^{(1)},s,0);(\!(A^{(2)*}_{p+1}A^{(2)}_1,A^{(2)*}_{p+1}A^{(2)}_2,\cdot\cdot$
$\cdot\cdot,A^{(2)*}_{p+1}A^{(2)}_p)\!),s,\tau))$,

wobei wie in (116),S.73 für $A\subseteq F_K(v,w)$, $B\subseteq F_K(w,z)$, $v,w\in S$, $z\in S\times\{0\}$

(128) $AB:=\{\alpha\in F_K(v,z);\exists\alpha'\in A,\exists\alpha''\in B : \alpha=\alpha'\alpha''\}$

ist, mit der part. Operation $(\alpha',\alpha'')\mapsto\alpha'\alpha''$ definiert in (118),(119), S.74, und für $A\subseteq F_K(s,s)$, $s\in S$,

$$A^*:=\{((x,s),1);\ x\in X_s\}\cup A\cup AA\cup AAA\cup\dots$$

ist (das Produkt ((128) ist offensichtlich assoziativ). Es ist wieder einfach einzusehen, daß die Isomorphieklasse der ersten bzw. der zweiten Komponente in (127) von der Wahl des Repräsentanten (126) von $a^{(1)}$ bzw. $a^{(2)}$ unabhängig ist. Wir definieren die Iteration

$$a^+:=(\overline{(A^{(2)*}_{p+1}A^{(1)},s,0)};\overline{(\!(A^{(2)*}_{p+1}A^{(2)}_1,\dots,A^{(2)*}_{p+1}A^{(2)}_p)\!),s,\tau)})\in(\!(X)\!)(s,0)\times(\!(X)\!)(s,\tau).$$

Ist $a=((p+1:[1]\to[p+1])^b,s,\tau s)\in I^b_S(s,\tau s)\subseteq(\!(X)\!)(s,0)\times(X)(s,\tau s)$, $(s,\tau)\in$ $\in S\times S^*$, so definieren wir

$$a^+:=((\emptyset:[1]\to[p])^b,s,\tau)\in G^b_{S,p}(s,\tau)\subseteq(\!(X)\!)(s,0)\times(\!(X)\!)(s,\tau).$$

Wir bezeichnen für jedes $(s,\tau)\in S\times S^*$ mit $i_{s,\tau}$ die Operation

$$(\!(X)\!)(s,0)\times(\!(X)\!)(s,\tau s)\longrightarrow(\!(X)\!)(s,0)\times(\!(X)\!)(s,\tau):a\mapsto a^+$$

und nennen die Familie $\lambda:=(i_{s,\tau})_{(s,\tau)\in S\times S^*}$ die <u>Iteration</u> in $((\!(X)\!)(\sigma,0)\times(\!(X)\!)(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S\times S^*}$.

Diese Iteration erinnert an die Iteration in $[\widehat{\Sigma_{\tilde{\alpha}}}]$ in §3, und es ist wieder nicht schwer einzusehen, daß wir den Beweis des Lemmas 3.10, S.25 nach geringen Modifikationen zum Nachweis der folgen-

den Behauptung verwenden können:
Seien $(s,\tau)\in S\times S^*$, $\tau=t_1\ldots t_p$, $c\in S_\Gamma(s,\tau s)$ ein Programm aus $\mathcal{S}_\Gamma$, $b(c)\in(\!(X)\!)(s,0)\times(\!(X)\!)(s,\tau s)$ seine Berechnung und $v_{[X]}(b(c)):X_s\to\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p+1],\ t_{p+1}=s\}$ ihr äußeres Verhalten. Dann gilt für die Iteration $c^+\in S_\Gamma(s,\tau)$ von c

(129) $b(c^+)=(b(c))^+$ in $(\!(X)\!)(s,0)\times(\!(X)\!)(s,\tau)$

(130) $v_{[X]}(b(c^+))=(v_{[X]}(b(c)))^+:X_s\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}$, partiell, definiert durch $(v_{[X]}(b(c)))^+:x\mapsto(y,j)$ genau dann, wenn ein $q\in\mathbb{N}_0$ und Elemente $x_0=x,x_1,x_2,\ldots,x_q$ aus X_s existieren, s.d. $v_{[X]}(b(c))(x_{i-1})=(x_i,p+1)$ $(i\in[q])$ und $v_{[X]}(b(c))(x_q)=(y,j)$.

Zusammenfassend erhalten wir aus (108),S.72, (120),S.74, (124), S.76 und (129):

5.11. Satz.
$\mathcal{L}:\mathcal{S}_\Gamma\to((\!(X)\!)(\sigma,0)\times(\!(X)\!)(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ ist ein Homomorphismus $(\mathcal{S}_\Gamma;I_S,\mu,\lambda,\iota)\to(((\!(X)\!)(\sigma,0)\times(\!(X)\!)(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}};I_S^b,\mu,\lambda,\iota)$.

Wir möchten noch anmerken, daß die Zielalgebra dieses Homomorphismus keine iterative Theorie ist, denn sie besitzt nicht die Eigenschaft (54),S.30.

5.11. Äußeres-Verhalten-Interpretation von Berechnungen (Fall Programmberechnungen)

Wir erinnern an die Kategorie $\mathcal{M}$ von Mengen und Abbildungen, S.41. Eine andere für uns nützliche Kategorie ist die Kategorie

$\mathcal{R}$

von Mengen und Relationen, mit Mengen als Objekten und mit allen Relationen zwischen den Elementen der Mengen M und N als Morphismen $M\to N$, mit der üblichen Komposition fg von Relationen $f:M\to N$ und $g:N\to Q$. Wir verwenden die Bezeichnung

$f:M\to N$

für eine Relation f von M nach N und schreiben außerdem

$f:x\mapsto y$,

wenn $x\in M$ und $y\in N$ in der Relation f stehen.

Sei $X=(X_s)_{s\in S}$ eine Mengenfamilie wie in den letzten zwei Abschnitten. Wir bezeichnen für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=$

$=t_1 \ldots t_p$ mit

(131) $[X]_R(\sigma,\tau)$ bzw. $[X]_P(\sigma,\tau)$

die Menge aller Relationen bzw. aller partiellen Abbildungen

$\{(x,i);x\in X_{s_i}, i\in[n]\} \to \{(y,j);y\in X_{t_j}, j\in[p]\}$ und setzen

(132) $[X]_R := ([X]_R(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ bzw. $[X]_P := ([X]_P(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$.

Das Produkt $\mu=(p_{\varsigma,\sigma,\tau})_{(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}}$ in $[X]_R$ ist die übliche Komposition von Relationen

(133) $p_{\varsigma,\sigma,\tau}:[X]_R(\varsigma,\sigma)\times[X]_R(\sigma,\tau)\to[X]_R(\varsigma,\tau):(f,g)\mapsto fg$.

$[X]_P$ ist bezüglich dieses Produkts abgeschlossen. Das Tupeln $\lambda=(t_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ in $[X]_R$ ist definiert durch

(134) $t_{\sigma,\tau}:[X]_R(s_1,\tau)\times\ldots\times[X]_R(s_n,\tau)\to[X]_R(\sigma,\tau):(f_1,\ldots,f_n)\mapsto$
$\mapsto\langle f_1,\ldots,f_n\rangle$
mit $\langle f_1,\ldots,f_n\rangle:(x,i)\mapsto(y,j) :\Leftrightarrow f_i:x\mapsto(y,j)$
$((\sigma,\tau)\in S^{*2}, \sigma=s_1\ldots s_n)$.

$[X]_P$ ist bezüglich des Tupelns abgeschlossen. Die Iteration $\lambda=(i_{s,\tau})_{(s,\tau)\in S\times S^*}$ in $[X]_R$ ist definiert durch

(135) $i_{s,\tau}:[X]_R(s,\tau s)\to[X]_R(s,\tau):f\mapsto f^+$ mit
$f^+:x\mapsto(y,j)$ genau dann wenn ein $q\in\mathbb{N}_0$ und Elemente $x_0=x,x_1,x_2,\ldots,x_q$ aus X_s existieren, s.d.
$f:x_{i-1}\mapsto(x_i,p+1)$ $(i\in[q])$ und
$f:x_q\mapsto(y,j)$
$((s,\tau)\in S\times S^*, \tau=t_1\ldots t_p)$.

$[X]_P$ ist bezüglich der Iteration abgeschlossen.

Für jedes Element $(f:[n]\to[p],\sigma,\tau)\in G_{S,P}(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\ldots s_n,\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, bezeichnen wir mit (f^b,σ,τ) das Element aus $[X]_P(\sigma,\tau)$

(136) $(f^b,\sigma,\tau):(x,i)\mapsto(x,f(i))$ genau dann, wenn $x\in X_{s_i}$, $i\in[n]$ sind und wenn $f(i)$ definiert ist.

Es ist einfach einzusehen, daß die komponentenweise Abbildung

(137) $G_{S,P}(\sigma,\tau)\to[X]_P(\sigma,\tau):(f,\sigma,\tau)\mapsto(f^b,\sigma,\tau)$ $((\sigma,\tau)\in S^{*2})$

folgende Eigenschaften besitzt:

(138) (137) erhält das Produkt in $\mathfrak{G}_{S,P}$ (s.(27),S.20);

(139) (137) erhält das Tupeln in $\mathfrak{G}_{S,P}$ (s.(36),S.23);

(140) (137) erhält die Iteration in $\mathfrak{G}_{S,P}$ (s.(43),S.27);

(141) ist jede der Mengen X_s ($s\in S$) nichtleer, so ist (137) eine komponentenweise Injektion von $\mathfrak{G}_{S,P}$ in $[X]_P$.

Wir bezeichnen für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$

$$\mathfrak{G}^{\flat}_{S,P}(\sigma,\tau) := \{(f^{\flat},\sigma,\tau);\ (f,\mathfrak{G},\tau)\in\mathfrak{G}_{S,P}(\sigma,\tau)\} \text{ und setzen}$$

(142) $$\mathfrak{G}^{\flat}_{S,P} := (\mathfrak{G}^{\flat}_{S,P}(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}.$$

Analog dazu definieren wir

(143) $\mathfrak{G}^{\flat}_{S,F}$ und $I^{\flat}_S = \mathfrak{G}^{\flat}_{S,F|S\times S^+}$.

Mit dieser Bezeichnung ist

(144) $([X]_R; I^{\flat}_S, \mu, \lambda, \iota)$

eine Algebra vom gleichen Typ wie $(\mathfrak{Y}_\Gamma; I_S, \mu, \lambda, \iota)$ und wie jede iterative Theorie mit dem Indexbereich S.

$$(\mathfrak{G}^{\flat}_{S,P}; I^{\flat}_S, \mu, \lambda, \iota) \subseteq ([X]_P; I^{\flat}_S, \mu, \lambda, \iota)$$

sind Unteralgebren von $[X]_R$.

Sei $\mathfrak{h}(\mathfrak{Y}_\Gamma) = (b(S_\Gamma(\sigma,\tau)))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}} \subseteq ((\!(X)\!)(\sigma,0)^{\times}(\!(X)\!)(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ die Mengenfamilie der Berechnungen der Programme aus $\mathfrak{Y}_\Gamma$ aus dem letzten Abschnitt. Wir haben dort jeder Berechnung $b(c)\in b(S_\Gamma(\sigma,\tau))$ ein Element

$$v_{[X]}(b(c))\in[X]_P(\sigma,\tau)$$

zugeordnet, das äußere Verhalten von b(c) (s.(99),S.70). Das definiert uns eine Interpretation von Berechnungen:

Definition.
Die äußeres-Verhalten-Interpretation von Berechnungen aus $\mathfrak{h}(\mathfrak{Y}_\Gamma)$ ist die Interpretation

(145) $$v_{[X]}: \mathfrak{h}(\mathfrak{Y}_\Gamma) \to [X]_P : b(c) \mapsto v_{[X]}(b(c)).$$

Aus dem letzten Abschnitt wiederholen wir die folgenden Eigenschaften von $v_{[X]}$:

$v_{[X]}$ erhält das Produkt (s.(121),S.74), Tupeln (s.(126),S.

76) und die Iteration (s.(130),S.77) in $((X)(\sigma,0)\times$
$\times(X)(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$;
$v_{[X]}(b(f,\sigma,\tau))=(f^b,\sigma,\tau)$ $((f,\sigma,\tau)$ aus $G_{S,P})$ (s.(109),S.73), insbesondere ist

(146) $v_{[X]}(b(s,0))=((\emptyset:[1]\to[0])^b,s,\varepsilon)$ $(s\in S)$ (s.(21),S.16);

(147) ist $c=\overline{(K,e,a,\gamma)}\in S_\Gamma(s,\tau)$, $s\in S$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^+$, und ist $e_1=a_j$, $j\in[p]$, so ist $v_{[X]}(b(c))=v_{[X]}(b(\overline{B_{j_p,s,\tau}}))=(j_p^b,s,\tau)\in I_S^b(s,\tau)$ in $[X]_P$ (s.(110),S.73);

(148) $v_{[X]}(b(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega)))=\pi_{s,\tau}(\omega)$ $(\omega\in\Omega_\tau^s$, $(s,\tau)\in S\times S^*)$ (s.(100),S.71).

5.12. Satz.
$v_{[X]}:\mathcal{A}(\mathcal{G}_\Gamma)\to[X]_P$ ist ein Homomorphismus $(\mathcal{A}(\mathcal{G}_\Gamma);I_S^b,\mu,\lambda,\iota)\to$
$\to([X]_P;I_S^b,\mu,\lambda,\iota)$ mit den Eigenschaften (146),(147),(148).

5.12. Berechenbare-Abbildung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{G}_\Gamma$ mittels Berechnungen (Fall Programmberechnungen)

Die Berechnung-Interpretation $\mathcal{A}$ der Programme aus $\mathcal{G}_\Gamma$, Abschnitt 5.10, ordnet jedem Programm $c\in S_\Gamma(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\ldots s_n,\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$ seine Berechnung b(c) zu. Die äußeres-Verhalten-Interpretation $\mathcal{V}_{[X]}$ von Berechnungen, Abschnitt 5.11, ordnet dieser Berechnung ein Element $v_{[X]}(b(c))$ aus $[X]_P(\sigma,\tau)$ zu, das äußere Verhalten der Berechnung b(c). Die Zusammensetzung der Interpretationen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{V}_{[X]}$ ist eine neue Interpretation über $\mathcal{G}_\Gamma$. Die dem Programm c durch diese Interpretation zugeordnete partielle Abbildung $v_{[X]}(b(c)):\{(x,i);x\in X_{s_i},i\in[n]\}\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}$ nennen wir die nach dem Program c mittels der Berechnung b(c) berechenbare Abbildung.

Definition.
Die berechenbare-Abbildung-Interpretation der Programme aus $\mathcal{G}_\Gamma$ mittels Berechnungen ist die Interpretation

$$\mathcal{A}\,v_{[X]}:\mathcal{G}_\Gamma\to[X]_P:c\mapsto v_{[X]}(b(c)).$$

Aus den Sätzen 5.11, S.77 und 5.12 folgt:

5.13. Satz.
$\mathcal{A}\,v_{[X]}:\mathcal{G}_\Gamma\to[X]_P$ ist ein Homomorphismus $(\mathcal{G}_\Gamma;I_S,\mu,\lambda,\iota)\to$
$\to([X]_P;I_S^b,\mu,\lambda,\iota)$ mit den Eigenschaften (146),(147),(148).

5.13. Direkte berechenbare-Relation-Interpretation der Programme aus $\mathcal{S}_\Gamma$ (Fall Programmberechnungen)

Man kann auch auf eine andere Weise jedem Programm c aus $\mathcal{S}_\Gamma$ vom Typ (σ,τ), $\sigma=s_1\ldots s_n,\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, Abschnitt 5.9, eine Relation $\{(x,i);x\in X_{s_i},i\in[n]\}\rightarrow\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}$ zuordnen, die als eine durch c berechenbare Relation betrachtet werden kann. Wir beschreiben zuerst zwei zu $([X]_R;I_S,\mu,\lambda,\iota)$ (s.(144),S.79) isomorphe Algebren, die wir in diesem Abschnitt benötigen.

Wir nehmen wieder an, das die nichtleere Indexmenge S die Zahl 0 nicht enthält. Wir bezeichnen mit

(149) R_X

die Kategorie mit den Objekten $s,t,\ldots\in S$ und mit dem Objekt 0, die für Objekte $s,t\in S$ die Menge aller Relationen $X_s\rightarrow X_t$ als die Morphismenmenge $R_X(s,t)$ und für $s\in S$ die (einelementige) Menge aller Relationen $X_s\rightarrow\emptyset$ bzw. $\emptyset\rightarrow X_s$ als die Morphismenmenge $R_X(s,0)$ bzw. $R_X(0,s)$ hat, mit der üblichen Komposition von Relationen. Wir identifizieren die Objekte $s\in S$ bzw. 0 mit den Einheitsmorphismen $1_s=id_{X_s}:X_s\rightarrow X_s$ bzw. $1_0=id_\emptyset:\emptyset\rightarrow\emptyset$. R_X ist eine semiadditive Kategorie, wobei für $f,g\in R_X(v,w)$, $v,w\in Obj(R_X)$, die Summe $f+g\in R_X(v,w)$ durch

(150) $(f+g):x\mapsto y \;:\Leftrightarrow\; (f:x\mapsto y \text{ oder } g:x\mapsto y)$

definiert ist. Sind $(\sigma,\tau)\in S^{+2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$, und sind $f_{ij}\in R_X(s_i,t_j)$ $(i\in[n],\ j\in[p])$, so heißt das Tripel

(151) $((f_{ij}),\sigma,\tau)$

mit der $(n\times p)$-Matrix (f_{ij}) eine Matrix über R_X vom Typ (σ,τ). Ist $\sigma=s_1\ldots s_n\in S^+$ und sind $f_i\in R_X(s_i,0)$ $(i\in[n])$, so heißt das Tripel

(152) $((f_i),\sigma,0)$

mit der $(n\times 1)$-Matrix (f_i) eine Matrix über R_X vom Typ $(\sigma,0)$. Im Falle $\sigma=s_1\ldots s_n,\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, $\sigma=\varepsilon$ oder $\tau=\varepsilon$ definieren wir die $(n\times p)$-Matrix über R_X vom Typ (σ,τ) und die (0×1)-Matrix über R_X vom Typ $(\varepsilon,0)$ analog wie in §2,S.9.

Wir bezeichnen für $\sigma,\tau\in S^*$ mit $(R_X)(\sigma,\tau)$ bzw. $(R_X)(\sigma,0)$ die Menge aller Matrizen über R_X vom Typ (σ,τ) bzw. $(\sigma,0)$ und setzen

(153) $(R_X):=((R_X)(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ und

(154) $[R_X] := (\langle\!\langle R_X \rangle\!\rangle(\sigma,0) \times \langle\!\langle R_X \rangle\!\rangle(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$.

Die Mengenfamilien $\langle\!\langle R_X \rangle\!\rangle$ und $[R_X]$ erinnern stark an die Mengenfamilien $\langle\!\langle \widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}} \rangle\!\rangle$ (s.(25),S.9) und $[\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}]$ (s.(31),S.10) in §2, deren algebraische Struktur aus §3 wir auf $\langle\!\langle R_X \rangle\!\rangle$ und $[R_X]$ sehr einfach übertragen können:

Wir übernehmen direkt die Definition (19),S.15 der ausgezeichneten Elemente

$$(\langle\!\langle A_{f,ij} \rangle\!\rangle, \sigma, \tau) \quad ((f,\sigma,\tau)\in \mathfrak{G}_{S,P}(\sigma,\tau),\ (\sigma,\tau)\in S^{*2})$$

in $\langle\!\langle R_X \rangle\!\rangle$, die wir nun mit

(155) (f^b,σ,τ)

bezeichnen (man bedenke jedoch, daß für uns jetzt $t_j = 1_{t_j}$ in R_X und $\emptyset\in R_X(s_i,t_j)$ $\emptyset: X_{s_i} \to X_{t_j}$ in (19),S.15 bedeuten!), und die Definition der ausgezeichneten Elemente

$$(\langle\!\langle A_{\overline{Df}} \rangle\!\rangle, \sigma, 0); (\langle\!\langle A_{f,ij} \rangle\!\rangle, \sigma, \tau)) \quad ((f,\sigma,\tau)\in \mathfrak{G}_{S,P}(\sigma,\tau),\ (\sigma,\tau)\in S^{*2})$$

in $[R_X]$ (s.(18),S.15, wobei wir als $(s_{i_k},0)$ den einzigen Morphismus $s_{i_k} \to 0$ in R_X nehmen), die wir in $[R_X]$ ebenfalls mit

(156) (f^b,σ,τ)

bezeichnen. Wir setzen noch

$$\mathfrak{G}^b_{S,P} := (\{(f^b,\sigma,\tau);\ (f,\sigma,\tau)\in \mathfrak{G}_{S,P}(\sigma,\tau)\})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$$

in $\langle\!\langle R_X \rangle\!\rangle$ bzw. $[R_X]$, und analog dazu definieren wir

$$\mathfrak{G}^b_{S,F} \quad \text{und} \quad I^b_S = \mathfrak{G}^b_{S,F}|_{S\times S^+}$$

in $\langle\!\langle R_X \rangle\!\rangle$ bzw. $[R_X]$. Die Definitionen der Operationen Produkt in $\langle\!\langle \widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}} \rangle\!\rangle$ bzw. $[\widehat{\Sigma_{\tilde{\pi}}}]$ (s.(25),S.18, (26),S.19) können wir direkt für die Mengenfamilie $\langle\!\langle R_X \rangle\!\rangle$ bzw. $[R_X]$ übernehmen. Wir erhalten (heterogene) Algebren

(157) $(\langle\!\langle R_X \rangle\!\rangle; I^b_S, \cdot, 1, i) \supseteq (\mathfrak{G}^b_{S,P}; I^b_S, \cdot, 1, i)$ und

(158) $([R_X]; I^b_S, \cdot, 1, i) \supseteq (\mathfrak{G}^b_{S,P}; I^b_S, \cdot, 1, i)$.

Wegen der universellen Eigenschaft des Objekts 0 aus R_X, der ein Nullobjekt ist, ist es nicht schwer einzusehen, daß die komponentenweise Abbildung

$$[R_X](\sigma,\tau) \to \langle\!\langle R_X \rangle\!\rangle(\sigma,\tau): ((\langle\!\langle f_i \rangle\!\rangle, \sigma, 0); (\langle\!\langle g_{ij} \rangle\!\rangle, \sigma, \tau)) \mapsto (\langle\!\langle g_{ij} \rangle\!\rangle, \sigma, \tau)$$
$$((\sigma,\tau)\in S^{*2})$$

ein Isomorphismus

(159) $([R_X];I_S^b,\mu,\lambda,\iota)\to((\!(R_X)\!);I_S^b,\mu,\lambda,\iota)$

ist, der jedem Element (f^b,σ,τ) aus $[R_X](\sigma,\tau)$ das Element (f^b,σ,τ) aus $(\!(R_X)\!)(\sigma,\tau)$ zuordnet. Wir identifizieren im Folgenden die Algebra $[R_X]$ mit der Algebra $(\!(R_X)\!)$.

Man sieht leicht, daß die komponentenweise Abbildung

(160) $\iota:[X]_R(\sigma,\tau)\to(\!(R_X)\!)(\sigma,\tau):f\mapsto((\!(f_{ij})\!),\sigma,\tau)$ mit $f_{ij}:x\mapsto y :\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x,i)\mapsto(y,j)$

$((\sigma,\tau)\in S^{*2})$

eine komponentenweise Bijektion $[X]_R\to(\!(R_X)\!)$ ist, die $G_{S,P}^b$ elementenweise festhält, und die das Produkt, Tupeln und die Iteration in $[X]_R$ erhält. Folglich ist ι ein Isomorphismus

(161) $\iota:([X]_R;I_S^b,\mu,\lambda,\iota)\to((\!(R_X)\!);I_S,\mu,\lambda,\iota)$.

Wir kehren jetzt zu unseren Programmen zurück. Seien Ω,X,π und Γ wie im Abschnitt 5.9, S.64. Seien $c\in S_\Gamma(\sigma,\tau)$ ein Programm aus $\mathcal{S}_\Gamma$ vom Typ (σ,τ), $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, und $C=(K,e,a,\gamma)$ ein Repräsentant von c. Wir wollen an die Untersuchung der Wege in Berechnungsgraphen im Abschnitt 2.3, S.5 anknüpfen, wobei wir jetzt Berechnungsgraphen über Γ statt Ω betrachten. (Man bedenke jedoch, daß die Algebren $(\mathcal{S}_\Gamma;I_S,\mu,\lambda,\iota)$ und $(\mathcal{S}_\Omega;I_S,\mu,\lambda,\iota)$ isomorph sind.) Die Knoten von Berechnungsgraphen über Γ sind mit den Elementen aus $\tilde\Gamma=\Gamma_{S\cup S\times\{0\}}$ (s.(3),S.2) markiert. In §2 haben wir die Menge

(162) $\Sigma_{\tilde\Gamma}:=\tilde\Gamma_0\cup\{(\gamma,i);\gamma\in\Gamma_\tau^s,\ (s,\tau)\in S\times S^+,\ \tau=t_1\ldots t_m,\ i\in[m]\}$

(s.(11),S.5) als das „Alphabet" definiert, dessen Elemente (mit Hintereinanderschreiben als Verknüpfung) die Marken von Wegen in Berechnungsgraphen über Γ bilden. Wir wollen wieder Wege in Berechnungsgraphen über Γ und ihre „Marken" betrachten, wobei wir jedoch diese Marken jetzt etwas anders definieren als in §2. Um die Analogie zu den Untersuchungen in §2 hervorzuheben, führen wir die folgende Bezeichnung ein:

ist $\gamma=(\omega,\pi_{s,\varepsilon}(\omega))\in\tilde\Gamma_\varepsilon^s$ oder $\gamma=(s,0)\in\tilde\Gamma_\varepsilon^s$, $s\in S$, so sei γ' die leere Relation

(163) $\gamma':=\emptyset:X_s\to\emptyset$;

ist $\gamma=s\in\tilde\Gamma_\iota^s$, $s\in S$, so sei γ' die Identität von X_s

(164) $\gamma':=id_{X_s}:X_s\to X_s$;

ist $\gamma=(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega))\in\tilde\Gamma_\tau^s$, $s\in S$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^+$, und ist $j\in[p]$, so sei $(\gamma,j)'$ die Relation definiert durch

(165) $(\gamma,j)':X_s\to X_{t_j}:x\mapsto y$ genau dann, wenn $\pi_{s,\tau}(\omega):x\mapsto(y,j)$

(wir möchten anmerken, daß nach (160) die $(1\times p)$-Matrix

(166) $(\!(\langle\gamma,1\rangle',\langle\gamma,2\rangle',\ldots,\langle\gamma,p\rangle')\!),s,\tau)\in(\!(R_X)\!)(s,\tau)$ genau das Abbild $\iota(\pi_{s,\tau}(\omega))$ von $\pi_{s,\tau}(\omega)\in[X]_p(s,\tau)\subseteq[X]_R(s,\tau)$ unter dem Isomorphismus $\iota:[X]_R\to(\!(R_X)\!)$ ist).

Wir setzen noch $\tilde{\Gamma}_0':=\{\gamma';\gamma\in\tilde{\Gamma}_0\}$ und

(167) $\Sigma_{\tilde{\Gamma}_0}':=\tilde{\Gamma}_0'\cup\{\langle\gamma,j\rangle';\gamma\in\Gamma_\tau^s,\ (s,\tau)\in S\times S^+,\ \tau=t_1\ldots t_p,\ j\in[p]\}$.

$\Sigma_{\tilde{\Gamma}_0}'$ ist eine Menge von Morphismen aus der Kategorie R_X (s.(149),S. 81). Ist jetzt

$$\alpha=(k_1,(\gamma_1,i_1),k_2,(\gamma_2,i_2),\ldots,k_r,(\gamma_r,i_r),k_{r+1})\quad\text{bzw.}$$

$$\alpha=(k_1,(\gamma_1,i_1),k_2,(\gamma_2,i_2),\ldots,k_r,(\gamma_r,i_r),k_{r+1},\gamma_{r+1})$$

ein Weg in unserem Berechnungsgraphen C über Γ (s.(12) bzw. (14), S.6), so definieren wir die Marke $m'(\alpha)$ von α als das Kompositum

(168) $m'(\alpha):=(\gamma_1,i_1)'(\gamma_2,i_2)'\ldots(\gamma_r,i_r)'$ bzw. $m'(\alpha):=(\gamma_1,i_1)'(\gamma_2,i_2)'\ldots(\gamma_r,i_r)'\gamma_{r+1}'$

in R_X. Wie bei der Untersuchung des freien äußeren Verhaltens von Berechnungsgraphen im Abschnitt 2.4, S.8 interessieren uns die Marken aller Wege in C von seinen Eingängen aus. Seien für jedes $i\in[n]$

(169) $f_i\in R_X(s_i,0)$

die Summe der Marken aller Wege vom i-ten Eingang zu Nullknoten in C und für jedes $i\in[n]$ und $j\in[p]$

(170) $g_{ij}\in R_X(s_i,t_j)$

die Summe der Marken aller Wege vom i-ten Eingang zum j-ten Ausgang in C. Wir könnten die Marken aller Wege von Eingängen in C aus zu einem Matrizenpaar aus $[R_X](\sigma,\tau)$ ordnen, wie wir das im Falle des freien äußeren Verhaltens gemacht haben (s.(26)-(30), S.9), aber aufgrund der Eigenschaft des Nullobjekts 0 sind in (169) alle Relationen immer leer, so daß wir uns Schreibarbeit sparen können (in Wirklichkeit, wir identifizieren $[R_X]$ mit $(\!(R_X)\!)$, s.(159),S.83), und wir definieren:

Das äußere Verhalten $v_{(\!(R_X)\!)}(C)$ des Berechnungsgraphen C ist die Matrix

(171) $v_{(\!(R_X)\!)}(C):=((\!(g_{ij})\!),\sigma,\tau)\in(\!(R_X)\!)(\sigma,\tau)$.

Es ist klar, daß zwei isomorphe Repräsentanten des obigen Programms c gleiches äußeres Verhalten haben. Wir können daher definieren:

Das äußere Verhalten $v_{(\!(R_X)\!)}(c)$ des Programms c ist

(172) $v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}(c) := v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}(C)$.

Wegen der Analogie zum freien äußeren Verhalten von Berechnungsgraphen bzw. Schemata über Γ kann man den Untersuchungen in §3 die folgenden Eigenschaften von $v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}$ direkt entnehmen:

sind $\gamma = (\omega, \pi_{s,\tau}(\omega)) \in \Gamma^S_\tau$, $s \in S$, $\tau = t_1 \ldots t_p \in S^+$, und B_γ der zugehörige Berechnungsgraph über Γ (s.(4),S.12), so ist

(173) $v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}(\overline{B_\gamma}) = (\langle\langle(\gamma,1),(\gamma,2),\ldots,(\gamma,p)\rangle\rangle, s, \tau) \in \langle\langle R_X\rangle\rangle(s,\tau)$ (s.(5),S.12);

sind $\gamma = (\omega, \pi_{s,\varepsilon}(\omega)) \in \Gamma^S_\varepsilon$, $s \in S$, und B_γ der zugehörige Berechnungsgraph über Γ (s.(4),S.12), so ist

(174) $v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}(\overline{B_\gamma}) = (\emptyset : [1] \to [0], s, \varepsilon) \in \langle\langle R_X\rangle\rangle(s,\varepsilon)$ (s.(7),S.13);

sind $\gamma = (s,0) \in \tilde{\Gamma}^S_\varepsilon$, $s \in S$, und B_γ der zugehörige Berechnungsgraph über Γ (s.(9),S.14), so ist

(175) $v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}(\overline{B_\gamma}) = (\emptyset : [1] \to [0], s, \varepsilon) \in \langle\langle R_X\rangle\rangle(s,\varepsilon)$ (s.(10),S.14);

sind $(f,\sigma,\tau) \in G_{S,p}(\sigma,\tau)$, $(\sigma,\tau) \in S^{*2}$, und $B_{f,\sigma,\tau}$ der zugehörige Berechnungsgraph über Γ(s.(16),S.15), so ist

(176) $v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}(\overline{B_\gamma}) = (f^\flat, \sigma, \tau) \in \langle\langle R_X\rangle\rangle(\sigma,\tau)$ (s.(17),S.15, (156),S.82).

Sei $c = \overline{(K,e,a,\gamma)} \in S_\Gamma(s,\tau)$, $s \in S$, $\tau = t_1 \ldots t_p \in S^+$, und es gelte $e_1 = a_j$, $j \in [p]$. Nach der Definition des äußeren Verhaltens $v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}$ (s.(170), (171),(172)) ist offensichtlich

(177) $v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}(c) = (\langle\langle \emptyset, \emptyset, \ldots, t_j, \ldots, \emptyset\rangle\rangle, s, \tau) \in \langle\langle R_X\rangle\rangle(s,\tau)$, $s = t_j$,

die $(1\times p)$-Matrix über R_X mit dem Einheitsmorphismus $t_j = 1_{t_j} : t_j \to t_j = id_{X_{t_j}} : X_{t_j} \to X_{t_j}$ an der j-ten Stelle und mit den leeren Relationen $\emptyset : X_{t_j} \to X_{t_i}$ sonst ($i \neq j$, $i \in [p]$); das ist aber genau die Matrix über R_X, die wir als das Element

(178) $((j : [1] \to [p])^\flat, t_j, \tau) \in I^\flat_S(t_j,\tau)$ in $\langle\langle R_X\rangle\rangle$

bezeichnet haben, und gleichzeitig ist es das äußere Verhalten $v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}(\overline{B_{j:[1]\to[p]}, t_j, \tau})$ (s.(176).

Die Beweise in §3, daß das freie äußere Verhalten von Schemata ihr Produkt, Tupeln und ihre Iteration erhält, kann man offensichtlich nach geringfügigen Modifikationen zum Nachweis der folgenden Behauptungen verwenden:

(179) $v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}(ac) = v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}(a) v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}(c)$ in $\langle\langle R_X\rangle\rangle$ $(a \in S_\Gamma(\varrho,\sigma), c \in S_\Gamma(\sigma,\tau), (\varrho,\sigma,\tau) \in S^{*3})$;

(180) $v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}(a_1), \ldots, v_{\langle\langle R_X\rangle\rangle}(a_n)\rangle$ in $\langle\langle R_X\rangle\rangle$
$(a_i \in S_\Gamma(s_i,\tau)$ $(i \in [n])$, $(\sigma,\tau) \in S^{*2}$, $\sigma = s_1 \ldots s_n)$;

(181) $v_{((R_X))}(a^+)=(v_{((R_X))}(a))^+$ in $((R_X))$ $(a\in S_\Gamma(s,\tau s),\ (s,\tau)\in S\times S^*)$.

Wenn wir jetzt die komponentenweise Abbildung $v_{((R_X))}:\mathfrak{S}_\Gamma\to((R_X)):c\mapsto v_{((R_X))}(c)$ mit der (komponentenweisen) Inversion $\iota^{-1}:((R_X))\to[X]_R$ des Isomorphismus (160),(161),S.83 zusammensetzen, so erhalten wir die folgende Interpretation über $\mathfrak{S}_\Gamma$:

Definition.
Die direkte berechenbare-Relation-Interpretation der Programme aus $\mathfrak{S}_\Gamma$ ist die Interpretation

$$v_{((R_X))}\iota^{-1}:\mathfrak{S}_\Gamma\to[X]_R:c\mapsto\iota^{-1}(v_{((R_X))}(c)).$$

Aus (173),S.85 und (166),S.84 bzw. aus (174),S.85, (160),S.83 und (136),S.78 ergibt sich

(182) $\iota^{-1}(v_{((R_X))}(\omega,\overline{\pi}_{s,\tau}(\omega)))=\overline{\pi}_{s,\tau}(\omega)$ $(\omega\in\Omega_\tau^S,\ (s,\tau)\in S\times S^*)$,

und analog dazu (s.(175),S.85, (160),S.83 und (136),S.78)

(183) $\iota^{-1}(v_{((R_X))}(s,0))=((\emptyset:[1]\to[0])^\flat,s,\varepsilon)\in\mathfrak{G}^\flat_{S,P}(s,\varepsilon)$ in $[X]_R$ $(s\in S)$.

Nach (177),(178),S.85 gilt:

(184) Ist $c=\overline{(K,e,a,\gamma)}\in S_\Gamma(s,\tau)$, $s\in S$, $\tau=t_1\dots t_p\in S^*$, und ist $e_1=a_j$, $j\in[p]$, so ist $\iota^{-1}(v_{((R_X))}(c))=\iota^{-1}(v_{((R_X))}(\overline{B_{j_p,s,\tau}}))=(j_p^\flat,s,\tau)\in I_S^\flat(s,\tau)$ in $[X]_R$.

ι^{-1} ist ein Isomorphismus $((R_X));I_S^\flat,\mathfrak{r},\mathfrak{l},\mathfrak{i})\to([X]_R;I_S^\flat,\mathfrak{r},\mathfrak{l},\mathfrak{i})$. Zusammen mit (176),(179),(180) und (181),S.85 erhalten wir also:

5.14. Satz.
$v_{((R_X))}\iota^{-1}:\mathfrak{S}_\Gamma\to[X]_R$ ist ein Homomorphismus $(\mathfrak{S}_\Gamma;I_S,\mathfrak{r},\mathfrak{l},\mathfrak{i})\to$ $\to([X]_R;I_S^\flat,\mathfrak{r},\mathfrak{l},\mathfrak{i})$ mit den Eigenschaften (182),(183),(184).

5.14. Berechenbare-Relation-Interpretation der Programme aus $\mathfrak{S}_\Gamma$ mittels des freien äußeren Verhaltens (Fall Programmberechnungen)

Es gibt noch dritte Möglichkeit, jedem Programm c aus $S_\Gamma(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\dots s_n$, $\tau=t_1\dots t_p\in S^*$, eine Relation $\{(x,i);x\in X_{s_i},i\in[n]\}\to$ $\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}$ zuzuordnen, die als eine nach diesem Programm berechenbare Relation angesehen werden kann. In §§2,3 haben wir die freies-äußeres-Verhalten-Interpretation

$$\nu_f : \mathcal{Y}_\Omega \to [\widehat{\Sigma_\Omega}] : b \mapsto \nu_f(b)$$

(s.(1),S.41) untersucht, die jedem Schema b über einer Zeichenmenge Ω sein freies äußeres Verhalten zuordnet, und ebenfalls ihre Einschränkungen auf spezielle Schemata, von denen uns hier die schleifenfreien und die schleifenfreien totalen interessieren. Die Abbilder der Schemata unter der ν_f-Interpretation (ihre Bedeutungen) besitzen die folgende Eigenschaft:

5.15. Satz.
Es gibt genau einen Homomorphismus

(185) $\varphi : (\nu_f(\mathcal{Y}_\Omega); I_S, \cdot, \wedge, \iota) \to ([X]_R; I_S^b, \cdot, \wedge, \iota)$ bzw.

(186) $\varphi : (\nu_f(\mathcal{Y}_\Omega^{sf}); I_S, \cdot, \wedge) \to ([X]_R; I_S^b, \cdot, \wedge)$ bzw.

(187) $\varphi : (\nu_f(\mathcal{Y}_\Omega^{sf,t}); I_S, \cdot, \wedge) \to ([X]_R; I_S^b, \cdot, \wedge)$,

der vorgegebene Werte $\varphi(\omega)$ auf den Elementen aus $(\Omega \setminus \Omega_0) \subseteq [\widehat{\Sigma_\Omega}]$ einnimmt.

Beweis:
Zunächst ist klar, daß auch die Werte $\varphi(\omega)$ des gesuchten Homomorphismus φ auf den Elementen aus Ω_0 und $S \times \{0\} = \widetilde{\Omega}_{S, P_S \times \{\iota\}}$ in $[\widehat{\Sigma_\Omega}]$ vorliegen, denn die Zielmenge $[X](s,\varepsilon) = \{\emptyset : X_s \to \emptyset\}$ ist einelementig ($s \in S$), so daß $\varphi : \omega \mapsto \emptyset : X_s \to \emptyset$ ($\omega \in \Omega_\varepsilon^S$) und $\varphi : (s,0) \mapsto \emptyset : X_s \to \emptyset$ für jedes s aus S für jede komponentenweise Abbildung $\varphi : [\widehat{\Sigma_\Omega}] \to [X]_R$ gilt, also auch für die Homomorphismen (185),(186),(187).
Nach dem Satz 5.1, S.42 kann es höchstens einen Homomorphismus (185),(186) bzw. (187) mit den vorgegebenen Werten $\varphi(\omega)$ ($\omega \in \Omega \subseteq [\widehat{\Sigma_\Omega}]$), $\varphi(\omega)$ ($\omega \in \Omega \cup S \times \{0\} \subseteq [\widehat{\Sigma_\Omega}]$) bzw. $\varphi(\omega)$ ($\omega \in \Omega \setminus \Omega_0 \subseteq [\widehat{\Sigma_\Omega}]$) geben, der Reihe nach. Wir zeigen jetzt seine Existenz.
Wir erinnern daran, daß die Knoten der schleifenfreien totalen Schemata über Ω nur mit den Zeichen $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$ und $s,t,\ldots \in S$ markiert sind; in beiden übrigen Fällen können außer diesen Zeichen auch die Elemente $\omega \in \Omega_0$ und $(s,0),(t,0),\ldots \in S \times \{0\} \subseteq \widetilde{\Omega}_0$ als Marken von Nullknoten auftauchen. Wir führen die folgende Bezeichnung ein:

ist $\omega \in \Omega_\varepsilon^S$ oder $\omega = (s,0)$ mit einem $s \in S$, so sei

(188) $\omega' := \emptyset : X_s \to \emptyset$, der einzige Morphismus $s \to 0$ aus der Kategorie R_X (vgl.(163),S.83);

ist $\omega = s \in S$, so sei

(189) $\omega' := id_{X_s} : X_s \to X_s = 1_s : s \to s$ aus R_X (vgl.(164),S.83);

ist $\omega \in \Omega_\tau^S$, $s \in S$, $\tau = t_1 \ldots t_p \in S^+$, und ist $\iota(\varphi(\omega)) = ((f_1,\ldots,f_p)), s, \tau) \in ((R_X))(s,\tau)$ das Abbild von $\varphi(\omega) \in [X]_R(s,\tau)$ unter dem Isomorphismus ι (s.(160),S.83), so bezeichnen wir für jedes $j \in [p]$

(190) $(\omega,j)' := f_j : X_s \to X_{t_j}$, s.d. $(\omega,j)' : s \to t_j$ aus R_X ist (vgl.(165), S.83,(166),S.84).

(Zu den angegebenen Vergleichen zum Abschnitt 5.13, S.83 möchten wir noch anmerken, daß die Algebren $(\mathcal{Y}_\Omega ; I_S, \mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{i})$ und $(\mathcal{Y}_\Gamma ; I_S, \mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{i})$ mittels der komponentenweisen Abbildung $\omega \mapsto \gamma = (\omega, \pi_{s,\tau}(\omega))$ $(\omega \in \mathcal{A}_\tau^s$, $(s,\tau) \in S^* \times S^*)$ isomorph sind, wobei Ω und Γ die in den Abschnitten 5.9 bis 5.13 benutzten Zeichenmengen sind).

Die Kategorie $(\Sigma_{\tilde{\mathfrak{A}}})$ (s.(17),S.7) ist durch die Menge $\Sigma_{\tilde{\mathfrak{A}}}$ (s.(11), S.5) frei generiert, so daß sich die Zuordnung

$$\Sigma_{\tilde{\mathfrak{A}}} \to R_X : a \mapsto a'$$

definiert in (188),(189),(190) eindeutig zu einem strikten (d.h. die Objekte elementenweise festhaltendem) Funktor $f : (\Sigma_{\tilde{\mathfrak{A}}}) \to R_X$ erweitern läßt. Bei unserer Behandlung von Kategorien als heterogene Algebren (vgl. Higgins 1963) betrachten wir f als eine komponentenweise Abbildung

$$f : (\Sigma_{\tilde{\mathfrak{A}}})(v,w) \to R_X(v,w) \quad (v,w \in S \cup \{0\}).$$

Wir erweitern sie durch

$$f(A) := \sum_{a \in A} f(a) \quad (A \subseteq (\Sigma_{\tilde{\mathfrak{A}}})(v,w),\ v,w \in S \cup \{0\})$$

in eine komponentenweise Abbildung

$$f : (\widehat{\Sigma_{\tilde{\mathfrak{A}}}})(v,w) \to R_X(v,w) \quad (v,w \in S \cup \{0\})$$

(s.(19),S.7, (154),S.82) und schliesslich durch

$$f((\!(A_i)\!),\sigma,0);((\!(B_{ij})\!),\sigma,\tau)) := (((\!(f(A_i))\!),\sigma,0);((\!(f(B_{ij}))\!), ,))$$

$$(((\!(A_i)\!),\sigma,0);((\!(B_{ij})\!),\sigma,\tau)) \in [\widehat{\Sigma_{\tilde{\mathfrak{A}}}}](\sigma,\tau),\ (\sigma,\tau) \in S^{*2})$$

in eine komponentenweise Abbildung

$$(191) \quad f : [\widehat{\Sigma_{\tilde{\mathfrak{A}}}}] \to [R_X]$$

(s.(31),S.10, (154),S.82). Die Einschränkung von (191) auf $\nu_f(\mathcal{Y}_\Omega)$, $\nu_f(\mathcal{Y}_\Omega^{sf})$ bzw. $\nu_f(\mathcal{Y}_\Omega^{sf,t})$ bezeichnen wir mit φ'. Aus den Definitionen des Produkts, Tupelns, der Iteration und der Mengenfamilie I_S der ausgezeichneten Elemente in $[\widehat{\Sigma_{\tilde{\mathfrak{A}}}}]$ und in $[R_X]$ ist sofort klar, daß φ' ein Homomorphismus $(\nu_f(\mathcal{Y}_\Omega); I_S, \mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{i}) \to ([R_X]; I_S, \mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{i})$ ist, und mit Berücksichtigung unserer Identifikation von $[R_X]$ mit $(\!(R_X)\!)$ (s.S.83 oben) ein Homomorphismus $\varphi' : (\nu_f(\mathcal{Y}_\Omega); I_S, \mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{i}) \to$ $\to ((\!(R_X)\!); I_S, \mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{i})$ ist. Die Komposition

$$\varphi := \varphi' \iota^{-1}$$

von φ' mit dem inversen Isomorphismus $\iota^{-1} : (\!(R_X)\!) \to [X]_R$ (s.(161),S.83) ist der gesuchte Homomorphismus (185). Die Homomorphismen (186) und (187) gewinnen wir als seine Einschränkungen.

Seien jetzt Ω, X, π und Γ wie im Abschnitt 5.9, S.64. Die Kompo-

sition der freies-äußeres-Verhalten-Interpretation

$$\nu_f:(\mathcal{S}_\Gamma;I_S,\dagger,\lambda,\iota)\to([\widehat{\Sigma_\Lambda}];I_S,\dagger,\lambda,\iota)$$

aus dem Abschnitt 5.1, die Γ und $S\times\{0\}$ elementenweise festhält (s. Satz 3.13, S.29) und die Eigenschaft

(192) ist $c=\overline{(K,e,a,\ )}\in S_\Gamma(s,\tau)$, $s\in S$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^+$, und ist $e_1=a_j$, $j\in[p]$, so ist $\nu_f(c)=\nu_f(\overline{B_{j_p,s,\tau}})=(j_p,s,\tau)\in I_S(s,\tau)$ in $[\widehat{\Sigma_\Lambda}]$

besitzt (vgl. (5),S.34 und die Betrachtung S.42 oben) und des nach Satz 5.15 durch π eindeutig bestimmten Homomorphismus

$$\varphi_\pi:(\nu_f(\mathcal{S}_\Gamma);I_S,\dagger,\lambda,\iota)\to([X]_R;I_S^\flat,\dagger,\lambda,\iota)$$

mit den Werten $\varphi_\pi(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega))=\pi_{s,\tau}(\omega)$ $(\omega\in\Omega_\tau^S,\ (s,\tau)\in S\times S^+)$ auf den Elementen aus Γ definiert uns eine Interpretation über $\mathcal{S}_\Gamma$:

Definition.
Die berechenbare-Relation-Interpretation der Programme aus $\mathcal{S}_\Gamma$ mittels des freien äußeren Verhaltens ist die Interpretation

$$\nu_f\varphi_\pi:\mathcal{S}_\Gamma\to[X]_R.$$

5.16. Satz.
$\nu_f\varphi_\pi$ ist ein Homomorphismus $\nu_f\varphi_\pi:(\mathcal{S}_\Gamma;I_S,\dagger,\lambda,\iota)\to([X]_R;I_S,\dagger,\lambda,\iota)$ mit den Eigenschaften

$$\nu_f\varphi_\pi(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega))=\pi_{s,\tau}(\omega)\quad(\omega\in\Omega_\tau^S,\ (s,\tau)\in S\times S^*);$$

$$\nu_f\varphi_\pi(s,0)=((\emptyset:[1]\to[0])^\flat,s,\varepsilon)\in G_{S,P}^\flat(s,\varepsilon)\text{ in }[X]_R\quad(s\in S);$$

ist $c=\overline{(K,e,a,\gamma)}\in S_\Gamma(s,\tau)$, $s\in S$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, und ist $e_1=a_j$, $j\in[p]$, so ist $\nu_f\varphi_\pi(c)=\nu_f\varphi_\pi(\overline{B_{j_p,s,\tau}})=(j_p^\flat,s,\tau)\in I_S^\flat(s,\tau)$ in $[X]_R$.

5.15. Die nach den Programmen aus $\mathcal{S}_\Gamma$ berechenbaren Abbildungen (Fall Programmberechnungen)

Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß die drei berechenbare-Relation-Interpretationen der Programme aus $\mathcal{S}_\Gamma$

(193) $\mathfrak{k}\nu_{[X]}$, $\nu_{(\!(R_X)\!)}\iota^{-1}$, $\nu_f\varphi_\pi:\mathcal{S}_\Gamma\longrightarrow[X]_R$

aus den Abschnitten 5.12, 5.13 und 5.14 gleich sind, woraus insbesondere folgt, daß die Bedeutung jedes Programms $c\in S_\Gamma(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\ldots s_n,\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, sowohl unter der Interpretation $\nu_{(\!(R_X)\!)}\iota^{-1}$ als auch unter der Interpretation $\nu_f\varphi_\pi$ eine partielle Abbildung

$$\{(x,i);x\in X_{s_i},i\in[n]\}\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}$$

ist, d.h. ein Element aus $[X]_P$, da $\mathfrak{k}\nu_{[X]}\ \mathcal{S}_\Gamma$ nach $[X]_P\subsetneq[X]_R$ abbil-

det. Außerdem gewinnen wir eine algebraische Charakterisierung ihres Wertebereiches, d.h. der Mengenfamilie aller nach den Programmen aus $\mathcal{Y}_\Gamma$ berechenbaren Abbildungen.

Nach den letzten drei Abschnitten sind (193) Homomorphismen

(194) $\varphi:(\mathcal{Y}_\Gamma;I_S,\mathfrak{f},\mathfrak{k},\mathfrak{l})\to([X]_R;I_S^b,\mathfrak{f},\mathfrak{k},\mathfrak{l})$ mit

(195) $\varphi:(\omega,\pi_{s,\tau}(\omega))\mapsto\pi_{s,\tau}(\omega)$ $(\omega\in\mathcal{A}_\tau^S,\ (s,\tau)\in S\times S^*)$ und

(196) $\varphi:(s,0)\mapsto((\emptyset:[1]\to[0])^b,s,\varepsilon)\in G_{S,P}^b(s,\varepsilon)$ in $[X]_R$ $(s\in S)$

und mit der Eigenschaft

(197) ist $c=\overline{(K,e,a,\gamma)}\in S_\Gamma(s,\tau)$, $s\in S$, $\tau=t_1\dots t_p\in S^*$, und ist $e_1=a_j$, $j\in[p]$, so ist $\varphi(c)=\varphi(\overline{B_{j_p,s,\tau}})=(j_p^b,s,\tau)\in I_S^b(s,\tau)$ in $[X]_R$.

Die Algebra $([X]_R;I_S^b,\mathfrak{f},\mathfrak{k},\mathfrak{l})$ (s.(144),S.79) besitzt offensichtlich die Eigenschaft (vgl. mit (54),S.30)

(198) sind $\sigma=s_1\dots s_n$, τ aus S^* und $f_i\in[X]_R(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$, so gibt es genau ein $f\in[X]_R(\sigma,\tau)$ s.d. $(i_n^b,s_i,\sigma)f=f_i$ $(i\in[n])$.

(Es genügt $f=\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ in $[X]_R$ zu nehmen.) Daraus ergibt sich für jedes $f\in[X]_R(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\dots s_n\in S^+$, $\tau\in S^*$,

$$\langle(1_n^b,s_1,\sigma)f,(2_n^b,s_2,\sigma)f,\dots,(n_n^b,s_n,\sigma)f\rangle=f.$$

$[X]_R$ ist im allgemeinen keine iterative Theorie, es sei denn, daß jede der Mengen X_s $(s\in S)$ nichtleer ist, so daß wir mittels $(f,\sigma,\tau)\to(f^b,\sigma,\tau)$ $G_{S,P}$ in $G_{S,P}^b\subseteq[X]_R$ komponentenweise einbetten können (s.(141),S.79). In diesem Fall können wir sofort die Sätze 4.1, S.34 und 4.2, S.40 anwenden. Man sieht jedoch ohne Schwierigkeiten, daß wegen der oben beschriebenen Eigenschaft von $[X]_R$ sowohl die Behauptung des Satzes 4.1 bezüglich der Algebren $(\mathcal{Y}_\Omega;I_S,\mathfrak{f},\mathfrak{k},\mathfrak{l})$, $(\mathcal{Y}_\Omega^{sf};I_S,\mathfrak{f},\mathfrak{k},\mathfrak{l})$ und $(\mathcal{Y}_\Omega^{sf,t};I_S,\mathfrak{f},\mathfrak{k})$ und ihr Beweis als auch die anschliessende Betrachtung über Zerlegung der Schemata aus $\mathcal{Y}_\Omega$, $\mathcal{Y}_\Omega^{sf}$ bzw. $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,t}$ und die entsprechende Behauptung des Satzes 4.2 gültig bleiben, wenn wir überall die Zieltheorie $(\mathcal{T};I_S,\mathfrak{f},\mathfrak{k},\mathfrak{l})$ bzw. $(\mathcal{T};I_S,\mathfrak{f},\mathfrak{k})$ des Homomorphismus (1),(2) bzw. (4), S.34 durch die Algebra $([X]_R;I_S^b,\mathfrak{f},\mathfrak{k},\mathfrak{l})$ bzw. $([X]_R;I_S^b,\mathfrak{f},\mathfrak{k})$ ersetzen und die Elemente (f,σ,τ) aus $G_{S,F}$ überall durch die Elemente (f^b,σ,τ) aus $G_{S,F}^b$ ersetzen. Wir erhalten dann:

Jeder Homomorphismus (194) bzw. $\varphi:(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf};I_S,\mathfrak{f},\mathfrak{k})\to([X]_R;I_S^b,\mathfrak{f},\mathfrak{k})$ bzw. $\varphi:(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,t};I_S,\mathfrak{f},\mathfrak{k})\to([X]_R;I_S^b,\mathfrak{f},\mathfrak{k})$ ist durch seine Werte in den Elementen von Γ bzw. $\Gamma\cup S\times\{0\}$ bzw. $\Gamma\setminus\Gamma_\zeta$, der Reihe nach, ein-

deutig bestimmt. (Wir erhalten sogar mehr, denn wegen der Eigenschaft von $[X]_R$, daß jede Menge $[X]_R(s,\varepsilon)$, $s\in S$, einelementig ist (bei den Theorien vgl. mit Nullobjekt-Theorien), ist der obige Homomorphismus in allen drei Fällen durch seine Werte in den Elementen aus $\Gamma\setminus\Gamma_0$ eindeutig bestimmt, s. die Betrachtung am Anfang des Beweises S.87.) Außerdem gilt

$$\mathcal{Y}(\mathcal{Y}_\Gamma)=[\mathcal{Y}(\Gamma)]_{([X]_R;I_S^b,\mu,\lambda,\iota)}$$

$$\mathcal{Y}(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf})=[\mathcal{Y}(\Gamma),\mathcal{Y}(S\times\{0\})]_{([X]_R;I_S^b,\mu,\lambda)}$$

$$\mathcal{Y}(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,t})=[\mathcal{Y}(\Gamma\setminus\Gamma_0)]_{([X]_R;I_S^b,\mu,\lambda)}.$$

5.17. Satz.
Die berechenbare-Abbildung-Interpretation mittels Berechnungen $\mathcal{L}v_{[X]}$, die direkte berechenbare-Relation-Interpretation $v_{(R_X)}\iota^{-1}$ und die berechenbare-Relation-Interpretation mittels des freien äußeren Verhaltens $v_f\psi_\pi$ der Programme aus $\mathcal{Y}_\Gamma$ sind gleich.

5.18. Satz.
Die Mengenfamilie $\mathcal{L}v_{[X]}(\mathcal{Y}_\Gamma)$ der nach den Programmen aus $\mathcal{Y}_\Gamma$ berechenbaren Abbildungen ist in $([X]_P;I_S^b,\mu,\lambda,\iota)$ durch $\pi(\Omega)=$ $=(\{\pi_{s,\tau}(\omega);\omega\in\Omega_\tau^S\})_{(s,\tau)\in S\times S^*}$ generiert, d.h. es ist die kleinste Familie von partiellen Abbildungen

(199) $\{(x,i);x\in X_{s_i},i\in[n]\}\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}$ $((s_1\ldots s_n,t_1\ldots t_p)\in S^{*2})$,

die die gegebenen part. Abbildungen (s.(77),(78),S.64)

(200) $\pi_{s,\tau}(\omega):X_s\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}$ $(\omega\in\Omega_\tau^S,\ (s,\tau)\in S\times S^*,\ \tau=t_1\ldots t_p)$

und die Injektionen

(201) $(i_p^b,t_i,\tau):X_{t_i}\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}:x\mapsto(x,i)$ $(i\in[p],\tau=t_1\ldots t_p\in S^+)$

enthält, und die bezüglich des Produkts, Tupelns und der Iteration derartiger part. Abbildungen (s.S.78) abgeschlossen ist.

Die Mengenfamilie $\mathcal{L}v_{[X]}(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf})$ der nach den schleifenfreien Programmen aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf}$ berechenbaren Abbildungen ist die kleinste Familie von part. Abbildungen (199), die die gegebenen part. Abbildungen (200), die leeren part. Abbildungen $\emptyset:X_s\to\emptyset$ $(s\in S)$ und die Injektionen (201) enthält, und die bezüglich des Produkts und Tupelns derartiger part. Abbildungen abgeschlossen ist.

Die Mengenfamilie $\mathcal{L}v_{[X]}(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,t})$ der nach den schleifenfreien totalen Programmen aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,t}$ berechenbaren Abbildungen ist die kleinste Familie von part. Abbildungen (199), die die gegebenen

part. Abbildungen (200) und die Injektionen (201) enthält, und die bezüglich des Produkts und Tupelns derartiger part. Abbildungen abgeschlossen ist. Sind in (200) alle Abbildungen total, so sind alle Abbildungen aus $\mathcal{A}v_{[X]}(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,t})$ total.

§6. Sukzessive Interpretation

Wir wollen jetzt die beiden in §5 behandelten Fälle von Berechnungen, die wir zur Unterscheidung algebraische Berechnungen (Abschnitte 5.2 bis 5.8) und Programmberechnungen (Abschnitte 5.9 bis 5.15) genannt haben, auf geeignete Weise kombinieren, um algemeinere Berechnungen zu erfassen.

Im Abschnitt 5.8 bzw. 5.15 hat sich gezeigt, daß die drei untersuchten berechenbare-Abbildung(Relation)-Interpretationen von Programmen, die wir im Falle algebraischer Berechnungen (s. die Abschnitte 5.5, 5.6, 5.7) bzw. von Programmberechnungen (s. die Abschnitte 5.12, 5.13, 5.14) betrachtet haben, jeweils gleich sind. Wir bezeichnen zur Abkürzung diese Interpretation von Programmen im Falle algebraischer Berechnungen mit

$$\mathcal{A}:\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\zeta t}\to(X)$$

(s.(72),S.62), im Falle von Programmberechnungen mit

$$\mathcal{A}:\mathcal{Y}_\Gamma\to[X]_P$$

(s.(193),S.89, mit der anschliessenden Bemerkung), und sprechen einfach von der berechenbare-Abbildung-Interpretation von Programmen.

Seien S eine nichtleere Menge und

(1) $X=(X_s)_{s\in S}$

eine Mengenfamilie. Wir bezeichnen für jedes $\sigma=s_1\ldots s_n\in S^*$ $Y_\sigma:=$ $:=X_{s_1}\times X_{s_2}\times\ldots\times X_{s_n}$ und setzen

(2) $Y:=(Y_\sigma)_{\sigma\in S^*}$.

Wir werden im Folgenden außer der Elemente s,t,... aus S und der Wörter $\sigma,\tau,\ldots$ aus S^* auch Wörter über dem Alphabet

(3) $T:=S^*$

als Indizes benutzen. Um Verwechslungen zu vermeiden, wollen wir derartige Wörter als Folgen

(4) $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m)$, $\sigma_i\in T$ $(i\in[m])$, $m\in\mathbb{N}_0$,

schreiben. Das freie Monoid generiert durch T bezeichnen wir mit

$T^{[+]}$. Die leere Folge, die das Einheitselement ist, werden wir auch mit $\emptyset$ bezeichnen. $T^{[+]}$ ist $T^{[*]} \setminus \emptyset$, und im Falle $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_m$ schreiben wir $\sigma^{[m]}$ statt (4). $\sigma^{[0]}$ ist $\emptyset$. Wie üblich, betten wir mittels $\sigma \to (\sigma)$ T in $T^{[*]}$ ein, d.h. bei eingliedrigen Folgen lassen wir die Klammern weg. $T^{[m]}$ ist die Menge aller m-gliedrigen Folgen (4).

Seien

$$(5)\quad F = \bigcup_{(s,\tau)\in S\times S^*} F^S_\tau$$

eine Zeichenmenge über dem Indexbereich S und

$$(6)\quad P = \bigcup_{(\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m))\in T\times T^{[*]}} P^\sigma_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)},\ P^\sigma_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)} \neq \emptyset \iff \tau_1 = \tau_2 = \ldots \tau_m = \sigma,$$

eine Zeichenmenge über dem Indexbereich T, mit $F \cap P = \emptyset$. Wir werden die Zeichen f aus F^S_τ $\lambda\tau$-stellige Operationszeichen nennen, die Zeichen p aus $P^\sigma_{\sigma^{[m]}}$ heißen m-wertige Prädikatszeichen.

Zu der Zeichenmenge F sei wie im §5, Abschnitt 5.2 (s.(14), S.47) eine Familie von Abbildungen

$$(7)\quad \varphi = (\varphi_{s,\tau})_{(s,\tau)\in S\times S^*},\quad \varphi_{s,\tau}: F^S_\tau \to (X)(s,\tau)$$

gegeben, die jedem n-stelligen Operationszeichen $f \in F^S_\tau$, $\tau = t_1 \ldots t_n$ eine Operation

$$(8)\quad \varphi_f := \varphi_{s,\tau}(f): X_{t_1} \times \ldots \times X_{t_n} \to X_s$$

zuordnet. Zu der Zeichenmenge P sei wie im Abschnitt 5.9 (s.(77), S.64) eine Familie von part. Abbildungen

$$(9)\quad \pi = (\pi_{\sigma,\sigma^{[m]}})_{\sigma\in T, m\in\mathbb{N}_0},\quad \pi_{\sigma,\sigma^{[m]}}: P^\sigma_{\sigma^{[m]}} \to [Y]_P(\sigma,\sigma^{[m]})$$

gegeben, die jedem m-wertigen Prädikatszeichen $p \in P^\sigma_{\sigma^{[m]}}$ eine part. Abbildung

$$(10)\quad \pi_p := \pi_{\sigma,\sigma^{[m]}}(p): Y_\sigma \to \{(y,j); y\in Y_\sigma, j\in[m]\}: y \mapsto (y,j)$$

zuordnet. (Man beachte, daß π_p von einer speziellen Art ist: das y bleibt unverändert.)

Man würde sagen, die komponentenweisen Abbildungen φ und π liefern uns die „Bedeutung" der Operationszeichen f aus F als gewisse (heterogene) Operationen φ_f über der Trägermengenfamilie $(X_s)_{s\in S}$ und die „Bedeutung" der Prädikatszeichen p aus P als gewisse (mehrstellige heterogene) Prädikate π_p über der Trägermengenfamilie $(X_s)_{s\in S}$.

F ist eine Zeichenmenge über dem Indexbereich S. Die schleifenfreien F_o-totalen Schemata über F können wir gleich als Program-

me interpretieren (Fall algebraische Berechnungen, s. Abschnitt 5.2, S.47), denn die Familie von Abbildungen ψ induziert eine Programm-Interpretation über Ψ_F^{sf,Et_0}:

Seien

$$(11)\quad \Gamma^{(o)} = \bigcup_{(s,\tau)\in S\times S^*} \Gamma^{(o)s}_{\tau}, \qquad \Gamma^{(o)s}_{\tau} := \{(f, \psi_{s,\tau}(f)); f\in F^s_\tau\}$$

die durch F und ψ bestimmte Zeichenmenge (s.S.47) und

$$(12)\quad \Psi^{sf,\Gamma^{(o)}_c t}_{\Gamma^{(o)}}$$

die zugehörige Mengenfamilie der schleifenfreien $\Gamma_c^{(o)}$-totalen Schemata (Programme) über $\Gamma^{(o)}$. Wir bezeichnen noch der Übersichtlichkeit halber mit

$$\Omega^{(o)} := F \quad \text{und} \quad \pi^{(o)} := \psi$$

die gegebenen Zeichenmenge (5) und Familie von Abbildungen (7). Die durch $\pi^{(o)}$ induzierte Programm-Interpretation über $\Psi^{sf,\Omega^{(o)}_c t}_{\Omega^{(o)}}$ (s.S.47 unten) bezeichnen wir mit

$$(13)\quad \mu^{(o)}: \Psi^{sf,\Omega^{(o)}_c t}_{\Omega^{(o)}} \longrightarrow \Psi^{sf,\Gamma^{(o)}_c t}_{\Gamma^{(o)}}.$$

Sie setzt sich mit der berechenbare-Abbildung-Interpretation

$$(14)\quad \alpha^{(o)}: \Psi^{sf,\Gamma^{(o)}_c t}_{\Gamma^{(o)}} \longrightarrow (X)$$

zusammen zu einer Interpretation

$$(15)\quad \mu^{(o)}\alpha^{(o)}: \Psi^{sf,\Omega^{(o)}_c t}_{\Omega^{(o)}} \longrightarrow (X)$$

der schleifenfreien $\Omega_c^{(o)}$-totalen Schemata über $\Omega^{(o)}$.

Durch die Schemata aus $\Psi^{sf,\Omega^{(o)}_c t}_{\Omega^{(o)}}$ werden relativ einfache Programme, Berechnungen und Abbildungen definiert. Wir haben uns mit ihnen ausführlich in §5 beschäftigt (Fall algebraische Berechnungen). Wir wollen jetzt für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$ die Elemente aus $S^{sf,\Omega^{(o)}_c t}_{\Omega^{(o)}}(\sigma,\tau)$ als neue Zeichen vom Typ $(\tau,\sigma)\in T^{[*]}\times T^{[*]}$ betrachten ($\Psi^{sf,\Omega^{(o)}_c t}_{\Omega^{(o)}}$ ist eine Familie von paarweise disjunkten Mengen; man beachte die umgekehrte Anordnung von (τ,σ)!). Zusammen mit den Prädikatszeichen $p\in P^{\sigma}_{c,l,m}$ (vom Typ $(\sigma,(\sigma,\ldots,\sigma))\in T^{[*]}\times T^{[m]}$) ($\sigma\in T, m\in\mathbb{N}_c$) verwenden wir sie jetzt bei der Konstruktion neuer Schemata, die „kompliziertere" Berechnungen und Abbildungen definieren sollen:

Sei

$$(16)\quad \Omega^{(1)} = \bigcup_{(\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m))\in T^{[*]}\times T^{[*]}} \Omega^{(1)\sigma}_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)}$$

die Zeichenmenge über dem Indexbereich T definiert durch

$$\Omega^{(1)}_{\tau} := P^{\sigma}_{\tau} \cup S^{sf,\mathfrak{A}^{(0)}}_{\mathfrak{A}^{(0)}} t(\tau,\sigma) \qquad ((\sigma,\tau)\in T^{[1]} \times T^{[1]})$$

$$\Omega^{(1)\sigma}(\tau_1,\ldots,\tau_m) := P^{\sigma}(\tau_1,\ldots,\tau_m) \qquad ((\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m))\in T^{[1]} \times (T^{[*]} \setminus T^{[1]})).$$

Sei

(17) $\pi^{[1]} = (\pi^{(1)}_{\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)})(\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m))\in T^{[1]} \times T^{[*]}$

die Familie von Abbildungen

$$\pi^{(1)}_{\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)} : \Omega^{(1)\sigma}(\tau_1,\ldots,\tau_m) \longrightarrow [Y]_P(\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)) \quad ((\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)\in T^{[1]} \times T^{[*]})$$

definiert durch

$$\pi^{(1)}_{\sigma,\sigma[m]}(\omega) := \pi_{\omega} \quad \text{falls } \omega\in P^{\sigma}_{\sigma[m]},\ \sigma\in T,\ m\in N_0.$$

$$\pi^{(1)}_{\sigma,\tau}(\omega) := d^{(\omega)}(\mu^{(\omega)}(\omega)) \quad \text{falls } \omega\in S^{sf,\mathfrak{A}^{(0)}}_{\mathfrak{A}^{(0)}} t(\tau,\sigma), \quad \sigma,\tau\in S^{*}.$$

Die Familie von Abbildungen $\pi^{(1)}$ induziert eine Programm-Interpretation über $\mathfrak{P}_{\Omega^{(1)}}$ (Fall Programmberechnungen), s. Abschnitt 5.9,S. 64):

Seien

(18) $\Gamma^{(1)} = \bigcup_{(\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m))\in T\times T^{[*]}} \Gamma^{(1)\sigma}(\tau_1,\ldots,\tau_m),\ \Gamma^{(1)\sigma}(\tau_1,\ldots,\tau_m) :=$

$$:= \{(\omega, \pi^{(1)}_{\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)}(\omega)); \omega\in \Omega^{(1)\sigma}(\tau_1,\ldots,\tau_m)\} \quad ((\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m))\in T\times T^{[*]})$$

die durch $\Omega^{(1)}$ und $\pi^{(1)}$ bestimmte Zeichenmenge (s.(79),S.64) und

(19) $\mathfrak{P}_{\Gamma^{(1)}}$

die zugehörige Mengenfamilie von Programmen. Mit

(20) $\mu^{(1)}: \mathfrak{P}_{\Omega^{(1)}} \longrightarrow \mathfrak{P}_{\Gamma^{(1)}}$

bezeichnen wir die durch $\pi^{(1)}$ induzierte Programm-Interpretation über $\mathfrak{P}_{\Omega^{(1)}}$ (s.S.64 unten). Sie setzt sich zusammen mit der berechenbare-Abbildung-Interpretation

(21) $d^{(1)}: \mathfrak{P}_{\Gamma^{(1)}} \longrightarrow [Y]_P$ zu einer Interpretation

(22) $\mu^{(1)}d^{(1)}: \mathfrak{P}_{\Omega^{(1)}} \longrightarrow [Y]_P$ der Schemata über $\Omega^{(1)}$.

Informell gesagt, wir verwenden relativ kleine schleifenfreie Schemata, die nur Operationszeichen enthalten, zusammen mit den Prädikatszeichen aus P zum Bau größerer Schemata, i.a. auch mit Verzweigungen und Schleifen. Die Art dieses Zusammenbaus wird mit Hilfe von Schemata über $\Omega^{(1)}$ bestimmt: die Knoten von Berechnungs-

graphen über $\Omega^{(1)}$ sind mit den schleifenfreien Schemata und mit den Prädikatszeichen markiert; die Pfeile bestimmen den Steuerfluß in dem durchzuführenden Rechenprozeß. Man muß dabei auf die „richtige Syntax" achten (s. die Bedingung (8)(a),S.3 aus der Definition des (heterogenen) Berechnungsgraphen): eine „Testanweisung", die ein Prädikatszeichen $p\in P_{\langle m\rangle}^{\sigma}$ enthält, darf genau dann in m anschliessende schleifenfreie Schemata verzweigen, wenn diese alle vom Argumenttyp σ (als ein Wort über S betrachtet) sind.

Uns werden vor allem Schemata $c\in S_{\Omega^{(1)}}(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\ldots s_n,\tau=t_1\ldots t_p\in T$, interessieren (deren Berechnungsgraphen über $\Omega^{(1)}$ also nur einen Eingang und einen Ausgang haben). Sie definieren unter der Interpretation (22) part. Abbildungen $X_{s_1}\times\ldots\times X_{s_n}\to X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}$, die jetzt nicht nur aus zusammengesetzten Operationen φ_f, $f\in F$, bestehen (wie oben im Falle von $\varphi_{\Omega^{(0)}}^{sf,\Omega^{(0)}_v t}$), sondern i.a. auch mit Hilfe von Prädikaten π_p, $p\in P$, unter Verwendung von Verzweigungen und Schleifen berechnet werden.

Die Rechenprozesse, die durch Schemata aus $\mathcal{S}_{\Omega^{(1)}}$ definiert werden, sind immer noch ziemlich speziell. Es gibt dort nur einen „uniformen" Steuerfluß. Wir wollen deshalb wieder jedes Schema $c\in S_{\Omega^{(1)}}(\sigma,\tau)$ über $\Omega^{(1)}$ von einem Typ $(\sigma,\tau)\in T^{[1]}\times T^{[1]}$ als ein neues Zeichen (Fall algebraische Berechnungen) betrachten, für dessen Typ sich jetzt allerdings mehrere Möglichkeiten bieten: für jedes $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m)\in T^{[m]}$, $m\in\mathbb{N}_0$, mit $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m=\sigma$ in S^* können wir das Paar $(\tau,(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m))\in T^{[1]}\times T^{[*]}$ als den Typ von c ansehen, wenn c als ein Zeichen über dem Indexbereich T betrachtet werden soll (man beachte die umgekehrte Anordnung von $(\tau,(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m))$ im Vergleich zu dem Typ (σ,τ) von c als ein Schema aus $\mathcal{S}_{\Omega^{(1)}}$ betrachtet!). Wir werden deshalb die Tripel $(c,\tau,(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m))$ ($\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m$ aus S^*, $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m=\sigma$ in S^*) als die neuen Zeichen nehmen, damit ihr Typ eindeutig bestimmt ist.

Sei

$$(23)\quad \Omega^{(2)}=\bigcup_{(\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m))\in T\times T^{[*]}} \Omega^{(2)\sigma}_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)}$$

die Zeichenmenge über dem Indexbereich T definiert durch

$$\Omega^{(2)\sigma}_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)}:=\{(c,\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m));c\in S_{\Omega^{(1)}}(\tau,\sigma),\ \tau_1\ldots\tau_m=\tau \text{ in } S^*\}$$

$$((\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m))\in T\times T^{[*]}).$$

Die „Bedeutung" der neuen Zeichen wird uns die Interpretation $\mu^{(1)}\alpha^{(1)}:\mathcal{S}_{\Omega^{(1)}}\to[Y]_P$ liefern. Da wir aber bei den algebraischen Berechnungen nur totale (heterogene) Operation über der gegebenen Trägermengenfamilie betrachtet haben, müssen wir hier statt jeder

part. Abbildung $\mathcal{A}^{(1)}(\mu^{(1)}(c)):Y_\tau \to Y_\sigma$, $c \in S_{\Omega^{(1)}}(\tau,\sigma)$, $\tau,\sigma \in T$, ihre Einpunkttotalisierung $\mathcal{A}^{(1)}_{[1]}(\mu^{(1)}(c)):Y_\tau \cup [1] \to Y_\sigma \cup [1]$ nehmen, wobei $Y_\sigma \cap [1] = \emptyset$ $(\sigma \in T)$ angenommen wird (s. Grätzer 1968, S.80). Wir bezeichnen

$$Y'_\sigma := Y_\sigma \cup [1] \quad (\sigma \in T) \quad \text{und}$$

(24) $Y' := (Y'_\sigma)_{\sigma \in T}$.

Sei jetzt

(25) $\pi^{(2)} = (\pi^{(2)}_{\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)})_{(\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)) \in T \times T^{[*]}}$

die Familie von Abbildungen

$$\pi^{(2)}_{\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)} : \Omega^{(2)\sigma}_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)} \to (Y')(\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)):$$

$$:(c,\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)) \mapsto \mathcal{A}^{(1)}_{[1]}(\mu^{(1)}(c)) \qquad ((\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)) \in T \times T^{[*]}).$$

$\pi^{(2)}$ induziert eine Programm-Interpretation über $\mathcal{Y}^{sf}_{\Omega^{(2)}_o t}$ (Fall algebraische Berechnungen, s. Abschnitt 5.2,S.47):
Seien

(26) $\Gamma^{(2)} = \bigcup_{(\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)) \in T \times T^{[*]}} \Gamma^{(2)\sigma}_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)}$, $\Gamma^{(2)\sigma}_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)} :=$

$$:= \{(\omega, \pi^{(2)}_{\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)}); \omega \in \Omega^{(2)\sigma}_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)}\}$$

die durch $\Omega^{(2)}$ und $\pi^{(2)}$ bestimmte Zeichenmenge und

(27) $\mathcal{Y}^{sf}_{\Gamma^{(2)},\Gamma^{(2)}_c t}$

die zugehörige Mengenfamilie von Programmen. Mit

(28) $\mu^{(2)}: \mathcal{Y}^{sf}_{\Omega^{(2)},\Omega^{(2)}_c t} \to \mathcal{Y}^{sf}_{\Gamma^{(2)},\Gamma^{(2)}_c t}$

bezeichnen wir die durch $\pi^{(2)}$ induzierte Programm-Interpretation. Sie setzt sich zusammen mit der berechenbare-Abbildung-Interpretation

(29) $\mathcal{A}^{(2)}: \mathcal{Y}^{sf}_{\Gamma^{(2)},\Gamma^{(2)}_c t} \to (Y')$ zu einer Interpretation

(30) $\mu^{(2)}\mathcal{A}^{(2)}: \mathcal{Y}^{sf}_{\Omega^{(2)},\Omega^{(2)}_c t} \to (Y')$.

Ist c ein schleifenfreies $\Omega^{(2)}_c$-totales Schema aus $\mathcal{Y}^{sf}_{\Omega^{(2)},\Omega^{(2)}_c t}$ und ist $((\sigma_1,\ldots,\sigma_n),(\tau_1,\ldots,\tau_p)) \in T^{[*]} \times T^{[*]}$ sein Typ, so ist die Bedeutung von c unter der Interpretation (30) eine Abbildung

(31) $\mathcal{A}^{(2)}(\mu^{(2)}(c)): Y'_{\tau_1} \times \ldots \times Y'_{\tau_p} \to Y'_{\sigma_1} \times \ldots \times Y'_{\sigma_n}$.

Seien $\sigma_i = s^{(i)}_1 \ldots s^{(i)}_{k_i}$ $(i \in [n])$, $\tau_j = t^{(j)}_1 \ldots t^{(j)}_{l_j}$ $(j \in [p])$ in S^*. Wir ordnen der Abbildung (31) die part. Abbildung

(32) $\widehat{\alpha^{(2)}(\mu^{(2)}(c))}: X_{t_1^{(1)}} \times \ldots \times X_{t_{l_1}^{(1)}} \times X_{t_1^{(2)}} \times \ldots \times X_{t_{l_2}^{(2)}} \times \ldots \times X_{t_1^{(p)}} \times \ldots \times X_{t_{l_p}^{(p)}} \longrightarrow$

$\longrightarrow X_{s_1^{(1)}} \times \ldots \times X_{s_{k_1}^{(1)}} \times X_{s_1^{(2)}} \times \ldots \times X_{s_{k_2}^{(2)}} \times \ldots \times X_{s_1^{(n)}} \times \ldots \times X_{s_{k_n}^{(n)}}$

zu, definiert durch

$$\widehat{\alpha^{(2)}(\mu^{(2)}(c))}: (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p) \mapsto (\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots, \varkappa_n') \quad :\Leftrightarrow$$

$$:\Leftrightarrow \alpha^{(2)}(\mu^{(2)}(c)): (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p) \mapsto (\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots, \varkappa_n') \text{ und } \varkappa_i, \varkappa_j' \neq 1 \ (i \in [p], j \in [n]).$$

Wir konstruieren also aus den Schemata $c \in S_{\Omega^{(n)}}(\tau,\sigma)$, $(\tau,\sigma) \in T \times T$, die wir als neue Zeichen $(c,\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m))$, $\tau_1 \ldots \tau_m = \tau$ in S^*, betrachten, wie gewöhnlich (vgl. mit §2 und mit dem Fall von $\Psi^{sf}_{\Omega^{(n)},\Omega_0^{(n)}}t$) schleifenfreie Schemata. In einem auf diese Weise definierten Rechenprozeß wird es i.a. keinen „uniformen" Steuerfluß geben. Es können mehrere voneinander unabhängige Teilprozesse (definiert durch gewisse Schemata $a,a',\ldots$ aus $\mathcal{S}_{\Omega^{(n)}}$, also i.a. mit Verzweigungen und Schleifen) parallel ablaufen, jeder mit seinem eigenen Steuerfluß, die sich dann vereinigen können und unter einer gemeinsamen Steuerung weiterlaufen können, u.ä.

Man kann jetzt den bisher geschilderten Prozess fortsetzen:

Wir betrachten das obige Schema $c \in S_{\Omega^{(2)}}{}^{sf,\Omega_0^{(2)}}t((\sigma_1,\ldots,\sigma_n),(\tau_1,\ldots,\tau_p))$ mit der Bedeutung (31) unter der Interpretation (30) als ein neues Zeichen vom Typ $(\tau_1 \ldots \tau_p, \sigma_1 \ldots \sigma_n) \in T^{[+]} \times T^{[+]}$ (man beachte die umgekehrte Anordnung). Seine „Bedeutung" wird die part. Abbildung (32) sein. Solche Zeichen zusammen mit den Prädikatszeichen $p \in P^{\sigma}_{\sigma[m]}$ ($\sigma \in T$, $m \in \mathbb{N}_0$) (vom Typ $(\sigma,\sigma^{[m]})$) verwenden wir zum Bau „noch komplizierterer" Berechnungsgraphen (vgl.(16) bis (21),S. 94, 95):

Sei

(33) $\Omega^{(3)} = \bigcup_{(\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)) \in T \times T^{[*]}} \Omega^{(3)\sigma}_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)}$

die Zeichenmenge über dem Indexbereich T definiert durch

$$\Omega^{(3)\sigma}_{\tau} := P^{\sigma}_{\tau} \cup \bigcup_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n),(\tau_1,\ldots,\tau_p) \in T^{[*]} \\ \sigma_1 \ldots \sigma_n = \sigma,\ \tau_1 \ldots \tau_p = \tau \text{ in } S^*}} S^{sf}_{\Omega^{(2)},\Omega_0^{(2)}}t((\tau_1,\ldots,\tau_p),(\sigma_1,\ldots,\sigma_n))$$

$((\sigma,\tau) \in T^{[+]} \times T^{[+]})$

$$\Omega^{(3)\sigma}_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)} := P^{\sigma}_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)} \quad ((\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)) \in T^{[+]} \times (T^{[*]} \setminus T^{[+]})).$$

Sei

(34) $\pi^{(3)}=(\pi^{(3)}_{\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)})_{(\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m))\in T\times T^{[*]}}$ die Familie von Abbildungen $\pi^{(3)}_{\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)}:\Omega^{(3)\sigma}_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)}\longrightarrow [Y]_P(\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m))$ definiert durch

$\pi^{(3)}_{\sigma,\sigma^{[m]}}(\omega):=\pi_\omega$ falls $\omega\in P^{\sigma}_{\sigma^{[m]}}$, $\sigma\in T$, $m\in\mathbb{N}_0$,

$\pi^{(3)}_{\sigma,\tau}(\omega):=\widehat{d^{(2)}(\mu^{(2)}(c))}$ falls $\omega\in S^{sf,\Omega^{(1)}_c}_{\Omega^{(3)}}t((\tau_1,\ldots,\tau_p),(\sigma_1,\ldots,\sigma_n))$,

$\sigma_1\ldots\sigma_n=\sigma$, $\tau_1\ldots\tau_p=\tau\in S^*$.

Die Familie von Abbildungen $\pi^{(3)}$ induziert eine Programm-Interpretation über $\mathcal{Y}_{\Omega^{(3)}}$ (Fall Programmberechnungen, s. Abschnitt 5.9, S. 64): Seien

(35) $\Gamma^{(3)}=\bigcup_{(\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m))\in T\times T^{[*]}}\Gamma^{(3)\sigma}_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)}$, $\Gamma^{(3)\sigma}_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)}:=$

$:=\{(\omega,\pi^{(3)}_{\sigma,(\tau_1,\ldots,\tau_m)});\omega\in\Omega^{(3)\sigma}_{(\tau_1,\ldots,\tau_m)}\}$

die durch $\Omega^{(3)}$ und $\pi^{(3)}$ bestimmte Zeichenmenge und

(36) $\mathcal{Y}_{\Gamma^{(3)}}$

die zugehörige Mengenfamilie von Programmen. Wir bezeichnen mit

(37) $\mu^{(3)}:\mathcal{Y}_{\Omega^{(3)}}\longrightarrow\mathcal{Y}_{\Gamma^{(3)}}$

die durch $\pi^{(3)}$ induzierte Programm-Interpretation. Sie setzt sich zusammen mit der Berechenbare-Abbildung-Interpretation

(38) $d^{(3)}:\mathcal{Y}_{\Gamma^{(3)}}\longrightarrow[Y]_P$ zu einer Interpretation über $\mathcal{Y}_{\Omega^{(3)}}$

(39) $\mu^{(3)}d^{(3)}:\mathcal{Y}_{\Omega^{(3)}}\longrightarrow[Y]_P$.

Man sieht jetzt, daß wir für $n\in\mathbb{N}$ eine Zeichenmenge

$\Omega^{(2n+1)}$ bzw. $\Omega^{(2n)}$

mit Hilfe von $\mathcal{Y}^{sf,\Omega^{(2n)}_c}_{\Omega^{(2n)}}t$ und P (vgl.(33),S.98) bzw. $\mathcal{Y}_{\Omega^{(2n-1)}}$ (vgl.(23), S.96), dazu eine Familie von Abbildungen

$\pi^{(2n+1)}$ bzw. $\pi^{(2n)}$

mit Hilfe von $\mu^{(2n)}d^{(2n)}$ und π (vgl.(34),S.99) bzw. $\mu^{(2n-1)}d^{(2n-1)}$ (vgl.(25),S.97), die dadurch induzierte Zeichenmenge

$\Gamma^{(2n+1)}$ bzw. $\Gamma^{(2n)}$

(vgl.(35),S.99 bzw. (26),S.97) und Mengenfamilie von Programmen

$\mathcal{Y}_{\Gamma^{(2n+1)}}$ bzw. $\mathcal{Y}^{sf,\Gamma^{(2n)}_o}_{\Gamma^{(2n)}}t$

(vgl.(36),S.99 bzw. (27),S.97), und die Interpretation

$\mathfrak{k}^{(2n+1)}\mathfrak{a}^{(2n+1)}$ über $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{Q}^{(2n+1)}}$ bzw. $\mathfrak{k}^{(2n)}\mathfrak{a}^{(2n)}$ über $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{Q}^{(2n)}}\mathfrak{sf}, \mathfrak{Q}_{\mathfrak{z}}^{(2n)}\mathfrak{t}$

(vgl.(39),S.99 bzw. (30),S.97) auf die gleiche Weise definieren können, wie wir es für n=1 gemacht haben. Wir erhalten rekursiv eine Folge

$$\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \ldots$$

von Zeichenmengen. Die Schemata über $\Omega^{(n)}$, $n \geq 1$, definieren Abbildungen, die mit Hilfe der vorgegebenen Operationen Ψ_f ($f \in F$) und Prädikate π_p ($p \in P$) unter Verwendung von „algebraischen Berechnungen mit Verzweigungen und Schleifen" oder „nichtmonadischen Programmberechnungen" berechnet werden. Weil man zur Feststellung der nach einem Schema c über $\Omega^{(n)}$ berechenbaren Abbildung bzw. der Berechnung dieses Schemas (d.h. der Bedeutung von c unter der Interpretation $\mathfrak{k}^{(n)}\mathfrak{a}^{(n)}$ bzw. $\mathfrak{k}^{(n)}\mathfrak{k}^{(n)}$, wobei $\mathfrak{k}^{(n)}$ die zugehörige Berechnung-Interpretation von Programmen ist) die nach den in c vorhandenen Schemata über $\Omega^{(n-1)}$ berechenbaren Abbildungen bzw. ihre Berechnungen kennen muß, sprechen wir von einer sukzessiven Interpretation.

Aufgrund der beiden Eindeutigkeitssätze für die berechenbare-Abbildung-Interpretationen (Satz 5.9, S.63, Satz 5.17, S.91) erhalten wir die Eindeutigkeit der nach dem Schema c berechenbaren part. Abbildung $\mathfrak{a}^{(n)}(\mathfrak{k}^{(n)}(c))$, die also unabhängig davon ist, ob man sie mit Hilfe von Berechnungsläufe, Berechnungen und ihrer äußeren Verhalten oder mit Hilfe der freien äußeren Verhalten bzw. Terme oder direkt bestimmt.

§7. Komplexität

Ähnlich wie bei den Interpretationen versteht man unter einem Komplexitätsmaß von irgendwelchen Objekten (z.B. von Berechnungen oder Programmen) meistens eine Abbildung k, die jedem betrachteten Objekt a ein Element k(a) aus einer halbgeordneten Menge $(H;\leq)$ als seine Komplexität zuordnet. Die Halbordnung-Relation $\leq$ in H induziert eine Vorordnung auf den betrachteten Objekten. Sind für zwei Objekte a,a' (z.B. zwei Berechnungen) ihre Komplexitäten k(a),k(a') bezüglich $\leq$ vergleichbar und gilt $k(a) \leq k(a')$, so sagt man z.B. „a ist einfacher als a' ". Wir wollen uns nur mit einigen speziellen Komplexitätsmaßen beschäftigen, die unter anderem die allen oben betrachteten Objekten gemeinsame $\mathfrak{M}(S^{*2})$-Struktur erhalten. S ist dabei wie früher eine nichtleere Menge.

Definition.
Sei $M=(M(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ ein Objekt aus $\mathfrak{M}(S^{*2})$ (s.S.41). Ein

Komplexitätsmaß über M ist ein Morphismus $M \to H$ aus $\mathcal{M}(S^{*2})$, wobei $H=(H(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ eine komponentenweise halbgeordnete Mengenfamilie ist. Das Abbild in H eines Elements aus M heißt seine Komplexität (bezüglich dieses Komplexitätsmaßes).

Wenn die Elemente aus M bereits einen Namen haben (z.B. Berechnungen), so werden wir auch von einem Komplexitätsmaß dieser Elemente sprechen (Komplexitätsmaß von Berechnungen). Nach der obigen Definition können wir Interpretationen mit Komplexitätsmaßen zusammensetzen (in $\mathcal{M}(S^{*2})$).

Wir interessieren uns jetzt für die Komplexität der Schemata, Programme, Berechnungen und der berechenbaren Abbildungen. Von den Komplexitätsmaßen von Berechnungen werden wir ausgehen.

Seien wie früher $\Omega = \bigcup_{(s,\tau)\in S\times S^*} \Omega_\tau^s$ eine Zeichenmenge mit dem Indexbereich S, $X=(X_s)_{s\in S}$ eine Mengenfamilie,

(1) $\mathfrak{p}:\mathfrak{Y}_\Omega^{sf,\Omega_0 t} \to \mathfrak{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma_0 t}$ bzw. $\mathfrak{p}:\mathfrak{Y}_\Omega \to \mathfrak{Y}_\Gamma$

eine durch eine Familie von Abbildungen

(2) $\pi:\Omega \to (X)_{|S\times S^*}$ bzw. $\pi:\Omega \to [X]_{P|S\times S^*}$

induzierte Programm-Interpretation (Fall algebraische Berechnungen bzw. Programmberechnungen),

(3) $\mathfrak{a}:\mathfrak{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma_0 t} \to (X)$ bzw. $\mathfrak{a}:\mathfrak{Y}_\Gamma \to [X]_P$

die zugehörige berechenbare-Abbildung-Interpretation und

(4) $\mathfrak{k}:\mathfrak{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma_0 t} \to \widehat{G}_X$ bzw. $\mathfrak{k}:\mathfrak{Y}_\Gamma \to ((\!(X)\!)(\sigma,0)\times(\!(X)\!)(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$

die zugehörige Berechnung-Interpretation.

Definition.
Ein Komplexitätsmaß von Berechnungen aus $\mathfrak{k}(\mathfrak{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma_0 t})$ bzw. $\mathfrak{k}(\mathfrak{Y}_\Gamma)$ ist ein Komplexitätsmaß $k=(k_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$

(5) $k:\mathfrak{k}(\mathfrak{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma_0 t}) \to (H;\leq)$ bzw. $k:\mathfrak{k}(\mathfrak{Y}_\Gamma) \to (H;\leq)$.

Wenn wir die Berechnung-Interpretation von Programmen (4) mit einem Komplexitätsmaß (5) zusammensetzen, so erhalten wir ein Komplexitätsmaß von Programmen

Definition.
Ein Berechnungskomplexitätsmaß der Programme aus $\mathfrak{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma_0 t}$ bzw. $\mathfrak{Y}_\Gamma$ ist das Kompositum

(6) $k'=\mathfrak{k}k:\mathfrak{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma_0 t} \to (H;\leq)$ bzw. $k'=\mathfrak{k}k:\mathfrak{Y}_\Gamma \to (H;\leq)$

der Berechnung-Interpretation von Programmen (4) mit einem Komplexitätsmaß von Berechnungen (5). Das Abbild eines Programms c

neißt die Berechnungskomplexität des Programms c (bezüglich des Berechnungskomplexitätsmaßes k').

Wenn wir die Programm-Interpretation von Schemata (1) induziert durch π in (2) mit einem Komplexitätsmaß (6) zusammensetzen, so erhalten wir ein Komplexitätsmaß von Schemata.

Definition.
Ein Berechnungskomplexitätsmaß der Schemata aus $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\lambda_0 t}$ bzw. $\mathcal{Y}_\Omega$ induziert durch π ist das Kompositum

(7) $k'' = \mu\, k' k : \mathcal{Y}_\Omega^{sf,\lambda_0 t} \to (H;\leq)$ bzw. $k'' = \mu\, k' k : \mathcal{Y}_\Omega \to (H;\leq)$

der durch π induzierten Programm-Interpretation von Schemata (1) mit einem Berechnungskomplexitätsmaß von Programmen (6).

Man ist oft an der unteren Grenze der Berechnungskomplexitäten (bezüglich eines Komplexitätsmaßes) aller Schemata aus $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\lambda_0 t}$ bzw. $\mathcal{Y}_\Omega$ interessiert, die eine gegebene Abbildung berechnen (unter einer gegebenen Programm-Interpretation). Da diese untere Grenze nicht immer existiert, erweitern wir die Definition eines Komplexitätsmaßes.

Definition.
Sei M ein Objekt aus $\mathcal{M}(S^{*2})$. Ein partielles Komplexitätsmaß über M ist eine Familie $k = (k_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ von part. Abbildungen

$$k_{\sigma,\tau} : M(\sigma,\tau) \to (H(\sigma,\tau);\leq_{\sigma,\tau}) \quad ((\sigma,\tau)\in S^{*2}),$$

für die wir $k : M \to (H;\leq)$ schreiben.

Definition.
Sei

$$k : \mathcal{Y}_\Omega^{sf,\lambda_0 t} \to (H;\leq) \quad \text{bzw.} \quad k : \mathcal{Y}_\Omega \to (H;\leq)$$

ein Komplexitätsmaß der Schemata aus $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\lambda_0 t}$ bzw. $\mathcal{Y}_\Omega$. Das partielle Komplexitätsmaß $\tilde{k} = (\tilde{k}_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ über (X) bzw. $[X]_p$ definiert durch

(8) $\tilde{k}_{\sigma,\tau} : (X)(\sigma,\tau) \to (H(\sigma,\tau);\leq_{\sigma,\tau}) : f \mapsto \inf\{k_{\sigma,\tau}(c); c\in S_\Omega^{sf,\lambda_0 t}(\sigma,\tau), \alpha(p(c)) = f\}$

bzw.

(9) $\tilde{k}_{\sigma,\tau} : [X]_p(\sigma,\tau) \to (H(\sigma,\tau);\leq_{\sigma,\tau}) : f \mapsto \inf\{k_{\sigma,\tau}(c); c\in S_\Omega(\sigma,\tau), \alpha(p(c)) = f\}$

$((\sigma,\tau)\in S^{*2})$

nennen wir das durch k induzierte partielle Komplexitätsmaß auf (X) bzw. $[X]_p$.

Bemerkung.
Strassen's Tiefe einer Berechnung (Strassen (1972),S .326), die wir mit T_{ST} bezeichnen, läßt sich in unserer Terminologie wie folgt Darstellen:
Gegeben sei eine heterogene Algebra $\mathcal{A}$ vom Typ $\Omega=\bigcup_{(s,\tau)\in S\times S^*}\Omega_\tau^s$, d.h. eine Trägermengenfamilie $(A_s)_{s\in S}$ und eine Familie von Operationen

$$\pi_{s,\tau}(\omega):A_{t_1}\times\ldots\times A_{t_p}\to A_s \quad (\omega\in\Omega_\tau^s,\ (s,\tau)\in S\times S^*,\ \tau=t_1\ldots t_p).$$

Eine endliche Teilmenge $F=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ von $A=\bigcup_{s\in S}A_s$ mit $a_i\in A_i$ $(i\in[k])$ wird in unserer Terminologie im Sinne von Strassen berechnet, wenn ein Schema $c\in S_\Omega^{sf,\Omega_0 t}(\sigma,\varepsilon)$, $\sigma\in S^*$ existiert mit $IM(\mathcal{A}(\mu(c)))\supseteq F$. Um die Tiefe T_{ST} einer endl. Menge $F\subseteq A$ zu erhalten, verwenden wir das Komplexitätsmaß von Schemata

$$T_{ST}:\mathcal{G}_\Omega^{sf,\Omega_0 t}\to(\mathbb{R}^+;\leq),$$

bei dem jedem Schema die Strassen's Tiefe zugeordnet wird; die Zielalgebra ist in diesem Fall homogen, d.h. es ist $(H(\sigma,\tau);\varsigma_{\sigma,\tau})=(\mathbb{R}^+;\leq)$ $((\sigma,\tau)\in S^{*2})$. Dann ist die Strassen's Tiefe der endlichen Menge F gleich

$$T(F)=\inf\{\widetilde{T_{ST}}(\varkappa)\in\mathbb{R}^+;\ \varkappa\in(A)(\sigma,\varepsilon),\ \sigma\in S^*,\ IM(\varkappa)\supseteq F\},$$

wobei $\widetilde{T_{ST}}$ das durch T_{ST} auf (A) induzierte part. Komplexitätsmaß ist.

Wir bringen jetzt zwei weitere Beispiele von Komplexitätsmaßen.

7.1. Argumentabhängige Tiefe algebraischer Berechnungen

Seien Ω,X,π und Γ wie im Abschnitt 5.2, S.47. Zusätzlich sei eine Familie von Abbildungen

(1) $\varkappa=(\varkappa_{s,\tau})_{(s,\tau)\in S\times S^*}$

gegeben mit der Eigenschaft, daß für $(s,\tau)\in S\times S^*$, $\tau=t_1\ldots t_p$ die Abbildung $\varkappa_{s,\tau}$ jedem Zeichen $\omega\in\Omega_\tau^s$ eine Abbildung

$$\varkappa_{s,\tau}(\omega):X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}\to\mathbb{R}_+ \quad (\mathbb{R}_+ \text{ sei die Menge der nichtnegat. reellen Zahlen, oben mit } \mathbb{R}^+ \text{ bez.})$$

zuordnet.
Seien jetzt $c\in S_\Omega^{sf,\Omega_0 t}(\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\ldots s_n,\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, $C=(K,e,a,\gamma)$ ein Repräsentant von c und $C'=(K,e,a,\gamma')$ der zugehörige Berechnungsgraph über Γ, der das Programm $p(c)\in S_\Gamma^{sf,\Gamma_0 t}(\sigma,\tau)$ von c repräsentiert (s.S.47).
Wir betrachten für jedes $(x_1,\ldots,x_p)\in X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}$ den Berechnungslauf $C'_{x_1\ldots x_p}=(K,e,a,\widetilde{\gamma})$ von C' für das Argument $(x_1,\ldots,x_p)$

(s.(29),S.52). Jedem seinen Knoten k ordnen wir auf folgende Weise (rekursiv nach der Höhe von k in $C'_{x_1\ldots x_p}$) eine nichtnegative reelle Zahl $\vartheta(k)$ zu, die wir die Tiefe von k nennen:

(2) $\vartheta(a_j):=0 \quad (j\in[p])$;

(3) sind $k\in K$, $\tilde{\gamma}'(k)=(\pi_{s,\tau}(\omega)(\emptyset),s)$, $\omega\in\Omega^s_\varepsilon$, $s\in S$ (s.(31),S.52), so sei $\vartheta(k):=\varkappa_{s,\varepsilon}(\omega)(\emptyset)$;

(4) sind $k\in K$, $\gamma'(k)=((\omega,\pi_{s,\tau}(\omega)),k_1,\ldots,k_m)$ in C', $\omega\in\Omega^s_\varsigma$, $s\in S$, $\varsigma=r_1\ldots r_m\in S^+$, sind $\tilde{\gamma}'(k_i)=(y_i,r_i)\in X_{r_i}\times S$ $(i\in[m])$ in $C'_{x_1\ldots x_p}$ (s.(32),S.52), und ist $\vartheta(k_i)\in\mathbb{R}_+$ die Tiefe von k_i $(i\in[m])$, so sei $\vartheta(k):=\mathrm{Max}\{\vartheta(k_1),\ldots,\vartheta(k_m)\}+\varkappa_{s,\varsigma}(\omega)(y_1,\ldots,y_m)$.

Die Tiefe $\vartheta(C'_{x_1\ldots x_p})$ des Berechnungslaufes $C'_{x_1\ldots x_p}$ ist definiert durch

(5) $\vartheta(C'_{x_1\ldots x_p}):=\mathrm{Max}\{\vartheta(e_1),\ldots,\vartheta(e_n)\}$ falls $\sigma\neq\varepsilon$

$\vartheta(C'_{x_1\ldots x_p}):=0$ falls $\sigma=\varepsilon$.

An dieser Stelle erinnern wir an das Terme-Verhalten $v_{\mathcal{J}}(k)$ eines Knoten k des Berechnungsgraphen C über Ω (s.S.44) und an das äußere Verhalten $v_{\mathcal{J}}(c)=v_{\mathcal{J}}(C)=(v_{\mathcal{J}}(e_1),\ldots,v_{\mathcal{J}}(e_n))\in T_\Omega(\sigma,\tau)$ des Schemas c (s.(10),S.45). Seien $\hat{c}\in S^{sf,zt}_\Omega(\sigma,\tau)$ ein anderes Schema vom gleichen Typ, $\hat{C}=(\hat{K},\hat{e},\hat{a},\hat{\gamma})$ ein Repräsentant von c und $\hat{C}'=(\hat{K},\hat{e},\hat{a},\hat{\gamma}')$ der zugehörige Berechnungsgraph über Γ, der das Programm $p(\hat{c})$ repräsentiert, und es gelte

$v_{\mathcal{J}}(c)=v_{\mathcal{J}}(\hat{c})$ d.h.

(6) $v_{\mathcal{J}}(e_i)=v_{\mathcal{J}}(\hat{e}_i)$ $(i\in[n])$.

Es ist klar, daß jede zwei Knoten $k\in K$, $\hat{k}\in\hat{K}$ mit $v_{\mathcal{J}}(k)=v_{\mathcal{J}}(\hat{k})$ mit einem und demselben Zeichen $\omega\in\tilde{\Omega}^r_\varsigma$ markiert sind, $r\in S$, $\varsigma=r_1\ldots r_m\in S^*$, und daß das Verhalten $v_{\mathcal{J}}$ des j-ten direkten Nachfolgers von k und $\hat{k}$ ebenfalls gleich ist $(j\in[m])$. Durch Induktion nach der Höhe von k erhält man sofort, daß für jedes Argument $(x_1,\ldots,x_p)\in X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}$ die Marke von k in $C'_{x_1\ldots x_p}$ mit der Marke von $\hat{k}$ in $\hat{C}'_{x_1\ldots x_p}$ übereinstimmt, und nach (2),(3),(4) sind dann auch ihre Tiefen gleich, $\vartheta(k)=\vartheta(\hat{k})$. Das heißt, nach (6) ist $\vartheta(e_i)=\vartheta(\hat{e}_i)$ $(i\in[n])$, und wir erhalten in (5)

(7) $\vartheta(C'_{x_1\ldots x_p})=\vartheta(\hat{C}'_{x_1\ldots x_p})$.

Die Tiefe $\vartheta(C'_{x_1\ldots x_p})$ ist offe sichtlich von der Wahl des Repräsentanten C unseres Schemas c unabhängig. Wir definieren deshalb

durch

(8) $\vartheta(\overline{c'_{x_1\dots x_p}}) := \vartheta(c'_{x_1\dots x_p})$

die Tiefe des Berechnungslaufs $\overline{c'_{x_1\dots x_p}}$ des Programms p(c) für das Argument $(x_1,\dots,x_p)$.

Für jedes $(x_1,\dots,x_p)\in X_{t_1}\times\dots\times X_{t_p}$ liefert uns also der Berechnungslauf $\overline{c'_{x_1\dots x_p}}$ des Programms p(c) ein n-tupel

(9) $v_X^{(1)}(\overline{c'_{x_1\dots x_p}}) = (y_1,\dots,y_n)\in X_{s_1}\times\dots\times X_{s_n}$

als die erste Kompnente seines äußeren Verhaltens v_X (s.(36),S. 53), und außerdem ergibt sich die Zahl

(10) $\vartheta(\overline{c'_{x_1\dots x_p}})\in\mathbb{R}_+$

als die Tiefe von $\overline{c'_{x_1\dots x_p}}$. Der Berechnung $b(p(c))=\{\overline{c'_{x_1\dots x_p}}; (x_1,\dots,x_p)\in X_{t_1}\times\dots\times X_{t_p}\}$ ordnen wir jetzt die auf diese Weise definierte Abbildung zu, die wir mit

(11) $v_{X,\mathbb{R}}(b(p(c))) : X_{t_1}\times\dots\times X_{t_p} \to (X_{s_1}\times\dots\times X_{s_n})\times\mathbb{R}_+ : (x_1,\dots,x_p) \mapsto$
$\mapsto (v_X^{(1)}(\overline{c'_{x_1\dots x_p}}), \vartheta(\overline{c'_{x_1\dots x_p}}))$

bezeichnen, und wir nennen sie die Tiefe der Berechnung b(p(c)). Aus der obigen Bemerkung folgt:

(12) sind $c,\hat{c}\in S_\Lambda^{sf,\Lambda,t}(\sigma,\tau)$, $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, mit gleichem äußeren Terme-Verhalten $v_{\mathcal{T}}(c)=v_{\mathcal{T}}(\hat{c})$, so ist $v_{X,\mathbb{R}}(b(p(c)))=v_{X,\mathbb{R}}(b(p(\hat{c})))$.

Zur Abkürzung bezeichnen wir für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\dots s_n$, $\tau=t_1\dots t_p$ mit $(X,\mathbb{R}_+)(\sigma,\tau)$ die Menge aller Abbildungen

$X_{t_1}\times\dots\times X_{t_p} \to (X_{s_1}\times\dots\times X_{s_n})\times\mathbb{R}_+$, und setzen

(13) $(X,\mathbb{R}_+) := ((X,\mathbb{R}_+)(\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$.

Auf jeder Menge $(X,\mathbb{R}_+)(\sigma,\tau)$ definieren wir eine Halbordnung $\leq_{\sigma,\tau}$ durch

$$f \leq_{\sigma,\tau} g :\Leftrightarrow \forall (x_1,\dots,x_p)\in X_{t_1}\times\dots\times X_{t_p} : (f(x_1,\dots,x_p) = ((y_1,\dots,y_n),u),\ g(x_1,\dots,x_p)=((y_1,\dots,y_n),u'),$$
$$y_i\in X_{s_i}\ (i\in[n]),\ u,u'\in\mathbb{R}_+, \text{ und } u\leq u' \text{ in } (\mathbb{R}_+;\leq)),$$

und bezeichnen mit

$$\leq := (\leq_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$$

die dadurch definierte komponentenweise Relation in $(X,\mathbb{R}_+)$.

Definition.
Die argumentabhängige Tiefe der Berechnungen aus $\mathcal{A}(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t})$ induziert durch $\varkappa$ ist das Komplexitätsmaß

$$v_{X,\mathbb{R}}:\mathcal{A}(\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t})\to((X,\mathbb{R}_+);\leq):b(p(c))\mapsto v_{X,\mathbb{R}}(b(p(c))).$$

Definition.
Die argumentabhängige Berechnungstiefe der Programme aus $\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}$ induziert durch $\varkappa$ ist das Komplexitätsmaß

$$\mathcal{A}v_{X,\mathbb{R}}:\mathcal{Y}_\Gamma^{sf,\Gamma\circ t}\to((X,\mathbb{R}_+);\leq):p(c)\mapsto v_{X,\mathbb{R}}(b(p(c))).$$

Die argumentabhängige Berechnungstiefe der Schemata aus $\mathcal{Y}_\Delta^{sf,\lambda\circ t}$ induziert durch π, $\varkappa$ ist

$$\mathcal{P}\mathcal{A}v_{X,\mathbb{R}}:\mathcal{Y}_\Delta^{sf,\lambda\circ t}\to((X,\mathbb{R}_+);\leq):c\mapsto v_{X,\mathbb{R}}(b(p(c))).$$

Die Mengenfamilie $(X,\mathbb{R}_+)$ von Abbildungen besitzt eine algebraische Struktur, die an die Algebra (X) (s.(59),S.57) erinnert; wir sprechen dann von einer halbgeordneten hetrogenen Algebra. Das Produkt $\mathcal{P}$ in $(X,\mathbb{R}_+)$ ist die Operation definiert durch

$$p_{\varsigma,\sigma,\tau}:(X,\mathbb{R}_+)(\varsigma,\sigma)\times(X,\mathbb{R}_+)(\sigma,\tau)\to(X,\mathbb{R}_+)(\varsigma,\tau):(g,f)\mapsto gf,$$

wobei für

$$f:x\mapsto(f^{(1)}(x),f^{(2)}(x))\in(X_{s_1}\times\ldots\times X_{s_n})\times\mathbb{R}_+\quad(x\in X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p})\quad\text{und}$$

$$g:y\mapsto(g^{(1)}(y),g^{(2)}(y))\in(X_{r_1}\times\ldots\times X_{r_m})\times\mathbb{R}_+\quad(y\in X_{s_1}\times\ldots\times X_{s_n})$$

gf durch

$$gf:x\mapsto(g^{(1)}(f^{(1)}(x)),f^{(2)}(x)+g^{(2)}(f^{(1)}(x)))\qquad(x\in X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p})$$

definiert ist. Da in $(X,\mathbb{R}_+)(\sigma,\tau)$ zwei Abbildungen f,f' genau dann vergleichbar sind, wenn $f^{(1)}=f'^{(1)}$ ist, existiert die untere Grenze einer Menge $F\subseteq(X,\mathbb{R}_+)(\sigma,\tau)$ nur dann, wenn

(14) $f^{(1)}=f'^{(1)}$ für jede $f,f'\in F$.

Ist das der Fall, so vergleichen wir die nichtnegativen reellen Zahlen

$$f^{(2)}(x_1,\ldots,x_p)\quad(f\in F)$$

für jedes $(x_1,\ldots,x_p)\in X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}$. Die untere Grenze dann existiert und ist gleich dem Element

$$\tilde{f}:x\mapsto(\tilde{f}^{(1)}(x),\tilde{f}^{(2)}(x))\in(X_{s_1}\times\ldots\times X_{s_n})\times\mathbb{R}_+\quad(x\in X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p})\quad\text{mit}$$

(15) $\tilde{f}^{(1)}:=f^{(1)}$, f' beliebig aus F

(16) $\tilde{f}^{(2)}:x\mapsto\inf_{(\mathbb{R}_+;\leq)}\{f^{(2)}(x);\ f\in F\}$

genau dann, wenn die untere Grenze in $\mathbb{R}_+$ in (16) existiert (und dies ist genau dann der Fall, wenn alle X_{t_i} $(i\in[p])$ und F nichtleer sind). Es ist leicht zu sehen, daß für $(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}$ gilt

$$(f,f'\in(X,\mathbb{R}_+)(\sigma,\tau),\ g,g'\in(X,\mathbb{R}_+)(\varsigma,\sigma) \text{ und } f\leq f',\ g\leq g') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (gf\leq gf' \text{ und } gf\leq g'f).$$

Man sagt:

(17) Die Operation Produkt in $((X,\mathbb{R}_+);\leq)$ ist isoton bezüglich beider ihren Variablen in ihrem ganzen Definitionsbereich.

Mit Hilfe von (14),(15),(16) kann man sich leicht überzeugen, daß für jedes $(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}$ außerdem gilt:

$$(F\leq(X,\mathbb{R}_+)(\sigma,\tau),\ f\in(X,\mathbb{R}_+)(\sigma,\tau),\ G\leq(X,\mathbb{R}_+)(\varsigma,\sigma),\ g\in(X,\mathbb{R}_+)(\varsigma,\sigma))$$

$$\Rightarrow (g(\inf_{\leq\sigma,\tau}F)=\inf_{\leq\varsigma,\tau}\{gf';f'\in F\}, \text{ wenn } \inf_{\leq\sigma,\tau}F \text{ existiert, und}$$

$$(\inf_{\leq\varsigma,\sigma}G)f=\inf_{\leq\varsigma,\tau}\{g'f;g'\in G\}, \text{ wenn } \inf_{\leq\varsigma,\sigma}G \text{ existiert}).$$

Man sagt:

(18) Die untere Grenze in $((X,\mathbb{R}_+);\leq)$ ist gegenüber dem Produkt in beiden ihren Variablen invariant.

Direkt aus der Definition der Tiefe $v_{X,\mathbb{R}}$ folgt für $\omega\in\Omega^r_\sigma\leq S_\Omega^{sf,\mathcal{L}ot}{}_{(r,\sigma)}$, $c\in S_\Omega^{sf,\mathcal{L}ot}(\sigma,\tau)$, $(r,\sigma,\tau)\in S\times S^*\times S^*$,

(19) $v_{X,\mathbb{R}}(b(p(\omega c)))=v_{X,\mathbb{R}}(b(p(\omega)))v_{X,\mathbb{R}}(b(p(c)))$ in $(X,\mathbb{R}_+)$.

Das Tupeln $\mathcal{L}$ in $(X,\mathbb{R}_+)$ ist definiert durch

$$t_{\sigma,\tau}(X,\mathbb{R}_+)(s_1,\tau)\times\ldots\times(X,\mathbb{R}_+)(s_n,\tau)\to(X,\mathbb{R}_+)(\sigma,\tau):(f_1,\ldots,f_n)\mapsto$$

$$\mapsto\langle f_1,\ldots f_n\rangle \quad ((\sigma,\tau)\in S^{*2},\ \sigma=s_1\ldots s_n,\ \tau=t_1\ldots t_p),$$

wobei für

$$f_i:\varkappa\mapsto(f_i^{(1)}(\varkappa),f_i^{(2)}(\varkappa))\in X_{s_i}\times\mathbb{R}_+ \quad (\varkappa\in X_{t_1}\times\ldots\times X_{t_p}) \quad (i\in[n])$$

$\langle f_1,\ldots,f_n\rangle$ durch

$$\langle f_1,\ldots,f_n\rangle:\varkappa\mapsto((f_1^{(1)}(\varkappa),\ldots,f_n^{(1)}(\varkappa),\mathrm{Max}\{f_1^{(2)}(\varkappa),\ldots,f_n^{(2)}(\varkappa)\})\in$$

$$\in(X_{s_1}\times\ldots\times X_{s_n})\times\mathbb{R}_+$$

bzw.

$$\langle\emptyset\rangle:\varkappa\mapsto(\emptyset,0)$$

definiert ist. Es ist leicht zu sehen, daß für $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1..$ $.s_n$ gilt

$$(f_i,f_i'\in(X,\mathbb{R}_+)(s_i,\tau) \text{ und } f_i\leq f_i' \quad (i\in[n])) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ($\langle f_1,\dots,f_j,\dots,f_n\rangle \leq \langle f_1,\dots,f'_j,\dots,f_n\rangle$ $(j\in[n])$), d.h.:

(20) Das Tupeln in $((X,\mathbb{R}_+);\leq)$ ist isoton bezüglich aller Variablen in ihrem ganzen Definitionsbereich.

Mit Hilfe von (14),(15),(16) kann man sich leicht überlegen, daß für $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\dots s_n$ außerdem gilt

($F_i\subseteq(X,\mathbb{R}_+)(s_i,\tau)$, $f_i\in(X,\mathbb{R}_+)(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ($\langle f_1,\dots,\inf_{\leq s_j,\tau} F_j,\dots,f_n\rangle=\inf_{\leq\sigma,\tau}\{\langle f_1,\dots,f'_j,\dots,f_n\rangle; f'_j\in F\}$,

wenn $\inf_{\leq s_j,\tau} F_j$ existiert, $(j\in[n])$) d.h.:

(2) Die untere Grenze in $(X,\mathbb{R}_+);\leq)$ ist gegenüber dem Tupeln in allen Variablen invariant.

Direkt aus der Definition der Tiefe $v_{X,\mathbb{R}}$ folgt für $c_i\in S_\Omega^{sf,\lambda\circ t}(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$, $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\dots s_n$

(22) $v_{X,\mathbb{R}}(b(p\langle c_1,\dots,c_n\rangle))=\langle v_{X,\mathbb{R}}(b(p(c_1))),\dots,v_{X,\mathbb{R}}(b(p(c_n)))\rangle$

in $(X,\mathbb{R}_+)$.

Wir bezeichnen noch für jedes $a=(f,s,\tau)\in I_S(s,\tau)\subseteq S_\Omega^{sf,\lambda\circ t}(s,\tau)$, $(s,\tau)\in S\times S^+$, mit

$\tilde{a}:=v_{X,\mathbb{R}}(b(p(a)))\in(X,\mathbb{R}_+)(s,\tau)$ seine Berechnungstiefe und setzen

$\tilde{I}_S(s,\tau):=\{\tilde{a}; a\in I_S(s,\tau)\subseteq S_\Omega^{sf,\lambda\circ t}(s,\tau)\}$ und

$\tilde{I}_S:=(\tilde{I}_S(s,\tau))_{(s,\tau)\in S\times S^+}$.

Jetzt ist

(23) $((X,\mathbb{R}_+);\leq);\tilde{I}_S,\not\sim,\lambda)$

eine halbgeordnete heterogene Algebra vom gleichen Typ wie $\mathfrak{S}_\Omega^{sf,\lambda\circ t}$ und besitzt dabei die Eigenschaften (17),(18),(20),(21).

Wir erinnern an die Definition des Produkts $\not\sim=(p_{\varsigma,\sigma,\tau})_{(\varsigma,\sigma,\tau)\in S^{*3}}$ von Schemata über Ω (s.(24),S.17). Im Folgenden wollen wir außer $\not\sim$ auch eine partielle heterogene Operation

(24) $\not\sim_P=(p_{P,r,\sigma,\tau})_{(r,\sigma,\tau)\in S\times S^*\times S^*}$

über den Schemata aus $\mathfrak{S}_\Omega$, $\mathfrak{S}_\Omega^{sf}$, $\mathfrak{S}_\Omega^{sf,\lambda\circ t}$ bzw. $\mathfrak{S}_\Omega^{sf,t}$ betrachten,

(25) $p_{P,r,\sigma,\tau}:\Omega_\sigma^r\times S_\Omega(\sigma,\tau)\to S_\Omega(r,\tau):(\omega,c)\mapsto\omega c$ $((r,\sigma,\tau)\in S\times S^*\times S^*)$

und analog für $\mathfrak{S}_\Omega^{sf}$, $\mathfrak{S}_\Omega^{sf,\lambda\circ t}$, $\mathfrak{S}_\Omega^{sf,t}$,

die durch die Einschränkung des totalen Produkts $p_{r,\sigma,\tau}$ auf den Definitionsbereich $\Omega^r_\sigma \times S_\Omega(\sigma,\tau) \subseteq S_\Omega(r,\sigma)\times S_\Omega(\sigma,\tau)$ entsteht, und analog für $\mathcal{F}^{sf}_\Omega$, $\mathcal{F}^{sf,\mathcal{L}_0 t}_\Omega$ bzw. $\mathcal{F}^{sf,t}_\Omega$. Wir nennen $\wedge_P$ das <u>partielle Produkt</u> von Schemata über Ω. Nach (19),S.107 und (22),S.108 gilt:

(26) Die Berechnungstiefe $\wedge h v_{X,\mathbb{R}}$ der Schemata aus $\mathcal{F}^{sf,\mathcal{L}_0 t}_\Omega$ ist ein Homomorphismus (im Sinne von Grätzer (1968),S.81 für part. heterogene Algebren

$$\wedge h v_{X,\mathbb{R}}: (\mathcal{F}^{sf,\mathcal{L}_0 t}_\Omega; I_S, \wedge_P, \wedge) \to ((X,\mathbb{R}_+); \tilde{I}_S, \wedge, \wedge).$$

7.2. <u>Argumentabhängige Tiefe von Programmberechnungen</u>

Seien Ω, X, π und Γ wie im Abschnitt 5.9, S.64. Zusätzlich sei eine Familie von Abbildungen

(1) $\varkappa = (\varkappa_{s,\tau})_{(s,\tau)\in S\times S^+}$

gegeben mit der Eigenschaft, daß für $(s,\tau)\in S\times S^+$, $\tau = t_1 \ldots t_p$ die Abbildung $\varkappa_{s,\tau}$ jedem Zeichen $\omega \in \mathcal{L}^S_\tau$ eine part. Abbildung

$$\varkappa_{s,\tau}(\omega): X_s \to \mathbb{R}_+$$

zuordnet mit dem gleichen Definitionsbereich wie $\pi_{s,\tau}(\omega)$.

Seien jetzt $c\in S_\Omega(\sigma,\tau)$ ein Schema über Ω, $\sigma = s_1 \ldots s_n$, $\tau = t_1 \ldots t_p \in S^*$, $C=(K,e,a,\gamma)$ ein Repräsentant von c und $C'=(K,e,a,\gamma')$ der zugehörige Berechnungsgraph über Γ, der das Programm $p(c)\in S_\Gamma(\sigma,\tau)$ von c repräsentiert (s.S.64). Wir betrachten für jedes $i\in[n]$ und $j\in[p]$ jeden Berechnungslauf

(2) $\alpha = ((x_0,u_0),k_1,(x_1,u_1,i_1),\ldots,k_m,(x_m,u_m,i_m),\ldots,k_q)$, $q\geq 1$

in C' (s.(82),S.65), der vom Eingang $e_i = k_1$ zum Ausgang $a_j = k_q$ geht, und ordnen jedem seinen Knoten k rekursiv eine nichtnegative reelle Zahl $\vartheta(k)$ zu, die wir die <u>Tiefe</u> von k nennen:

(3) $\vartheta(k_1) := 0$;

(4) sind $m\in\mathbb{N}$ und $\vartheta(k_m)\in\mathbb{R}_+$ die Tiefe von k_m, und ist $\gamma'(k_{m+1}) = ((\omega, \pi_{s,\varsigma}(\omega)),\ldots)$, $\omega\in\mathcal{L}^S_\varsigma$, $(s,\varsigma)\in S\times S^+$, so sei $\vartheta(k_{m+1}) := \vartheta(k_m) + \varkappa_{s,\varsigma}(\omega)(x_{m-1})$.

Die Zahl

(5) $\vartheta(k_q)\in\mathbb{R}_+$

heißt die Tiefe des Berechnungslaufs (2) in C' für das Argument x_0. Es ist klar, daß wir von einem anderen Repräsentanten D von c ausgehend für den Berechnungslauf im D' vom i-ten Eingang von D' für das Argument x_0 (der ebenfalls zum j-ten Ausgang von D' geht) die gleiche Zahl wie (5) als seine Tiefe erhalten.

Das äußere Verhalten $v_{[X]}(b(p(c))$ der Berechnung b(p(c)) des Programms p(c) ist eine part. Abbildung (s.(99),S.70)

(6) $v_{[X]}(b(p(c))):\{(x,i);x\in X_{s_i},i\in[n]\}\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}$,

die dem Paar (x,i) das Paar (y,j) genau dann zuordnet, wenn der Berechnungslauf vom i-ten Eingang für das Argument x in einem Repräsentanten von p(c) zum j-ten Ausgang geht und wenn y sein Ergebnis ist. Wenn wir jetzt noch zusätzlich die Tiefe dieses Berechnungslaufs berücksichtigen, so erhalten wir eine part. Abbildung

(7) $\{(x,i);x\in X_{s_i},i\in[n]\}\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}\times\mathbb{R}_+$

mit dem gleichen Definitionsbereich wie (6); wir ordnen diese Abbildung der Berechnung b(p(c)) zu, bezeichnen sie mit

(8) $v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p(c)))$

und nennen sie die Tiefe der Berechnung b(p(c)).

Es ist nicht schwer sich zu überzeugen, daß Folgendes gilt:

(9) Sind $c,\hat{c}\in S_{\mathfrak{A}}(\sigma,\tau)$, $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, mit der gleichen zweiten Komponente $v_f^{i(2)}(c)=v_f^{j(2)}(\hat{c})$ ihres freien äußeren Verhaltens (s. Abschnitt 2.4, S.8), so ist $v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p(c)))=v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p(\hat{c})))$.

Zur Abkürzung bezeichnen wir für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$ mit $[X,\mathbb{R}_+](\sigma,\tau)$ die Menge aller part. Abbildungen $\{(x,i);x\in X_{s_i},i\in[n]\}\to\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}\times\mathbb{R}_+$ und setzen

(10) $[X,\mathbb{R}_+]:=([X,\mathbb{R}_+](\sigma,\tau))_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$.

Für jedes $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p$ definieren wir in der Menge $[X,\mathbb{R}_+](\sigma,\tau)$ eine Halbordnung $\leq_{\sigma,\tau}$ durch

$f\leq_{\sigma,\tau}g :\Leftrightarrow$ $D_f=D_g$ (D_f ist der Definitionsbereich von f) und $\forall(x,i)\in D_f$: $(f(x,i)=((y,j),u)$, $g(x,i)=((y,j),u')$, $y\in X_{t_j}$, $j\in[p]$, $u,u'\in\mathbb{R}_+$, und $u\leq u'$ in $(\mathbb{R}_+;\leq)$),

und bezeichnen mit

$\leq :=(\leq_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$

die dadurch definierte komponentenweise Relation in $[X,\mathbb{R}_+]$.

Definition.
Die argumentabhängige Tiefe der Berechnungen aus $\mathfrak{h}(\mathcal{Y}_\Gamma)$ induziert durch $\varkappa$ ist das Komplexitätsmaß

$$v_{[X,\mathbb{R}]}:\mathfrak{h}(\mathcal{Y}_\Gamma)\to([X,\mathbb{R}_+];\leq):b(p(c))\mapsto v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p(c))).$$

Die argumentabhängige Berechnungstiefe der Programme aus $\mathcal{Y}_\Gamma$ induziert durch $\varkappa$ ist

$$\mathfrak{h}\,v_{[X,\mathbb{R}]}:\mathcal{Y}_\Gamma\to([X,\mathbb{R}_+];\leq):p(c)\mapsto v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p(c))).$$

Die argumentabhängige Berechnungstiefe der Schemata aus $\mathcal{Y}_\Omega$ induziert durch $\pi,\varkappa$ ist

$$\pi\mathfrak{h}\,v_{[X,\mathbb{R}]}:\mathcal{Y}_\Omega\to([X,\mathbb{R}_+];\leq):c\mapsto v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p(c))).$$

Die Mengenfamilie $[X,\mathbb{R}_+]$ von Abbildungen besitzt eine algebraische Struktur, die an die Algebra $[X]_p$ (s.S.79) erinnert.

Das Produkt π in $[X,\mathbb{R}_+]$ ist definiert durch

$$p_{\varsigma,\sigma,\tau}:[X,\mathbb{R}_+](\varsigma,\sigma)\times[X,\mathbb{R}_+](\sigma,\tau)\to[X,\mathbb{R}_+](\varsigma,\tau):(f,g)\mapsto fg,$$

wobei für $\varsigma=r_1\ldots r_m$, $\sigma=s_1\ldots s_n$, $\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$ und für

$$f:(x,i)\mapsto(f^{(1)}(x,i),f^{(2)}(x,i))\in\{(y,j);y\in X_{s_j},j\in[n]\}\times\mathbb{R}_+\quad(x\in X_{r_i},\ i\in[m])$$

und

$$g:(y,j)\mapsto(g^{(1)}(y,j),g^{(2)}(y,j))\in\{(z,k);z\in X_{t_k},k\in[p]\}\times\mathbb{R}_+\quad(y\in X_{s_j},\ j\in[n])$$

fg durch

$$fg:(x,i)\mapsto(g^{(1)}(f^{(1)}(x,i)),f^{(2)}(x,i)+g^{(2)}(f^{(1)}(x,i)))\in\{(z,k);z\in X_{t_k},\ k\in[p]\}\times\mathbb{R}_+$$

$(x\in X_{r_i},\ i\in[n])$

definiert ist.
Da in $[X,\mathbb{R}_+](\sigma,\tau)$, $\sigma=s_1\ldots s_n,\tau=t_1\ldots t_p\in S^*$, zwei part. Abbildungen f,f' genau dann vergleichbar sind, wenn $f^{(1)}=f'^{(1)}$ ist, existiert die untere Grenze einer Menge $F\subseteq[X,\mathbb{R}_+](\sigma,\tau)$ nur dann, wenn

(11) $f^{(1)}=f'^{(1)}$ für jede $f,f'\in F$.

Ist das der Fall, so vergleichen wir die nichtnegativen reellen Zahlen

$$f^{(2)}(x,i)\quad(f\in F)$$

für jedes $x\in X_{s_i}$ und jedes $i\in[n]$. Die untere Grenze dann existiert und ist gleich dem Element

$$\tilde{f}:(x,i)\mapsto(\tilde{f}^{(1)}(x,i),\tilde{f}^{(2)}(x,i))\in\{(y,j);y\in X_{t_j},j\in[p]\}\times\mathbb{R}_+\quad(x\in X_{s_i},\ i\in[n])$$

mit

(12) $\tilde{f}^{(1)} := f'^{(1)}$, f' beliebig aus F

(13) $\tilde{f}^{(2)} : (x,i) \mapsto \inf_{(\mathbb{R}_+;\leq)} \{f'^{(2)}(x,i);\ f' \in F\}$

genau dann, wenn diese untere Grenze in (13) existiert.

Es ist leicht zu sehen, daß für $(\varsigma,\sigma,\tau) \in S^{*3}$ gilt

$$(\ f,f' \in [X,\mathbb{R}_+](\varsigma,\sigma),\ g,g' \in [X,\mathbb{R}_+](\sigma,\tau) \text{ und } f \leq f',\ g \leq g'\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\ fg \leq f'g' \text{ und } fg \leq fg'\ ), \text{ d.h.:}$$

(14) Das Produkt in $([X,\mathbb{R}_+];\leq)$ ist isoton bezüglich beider Variablen in ihrem ganzen Definitionsbereich.

Mit Hilfe von (11),(12),(13) kann man sich leicht überzeugen, daß außerdem für jedes $(\varsigma,\sigma,\tau) \in S^{*3}$ gilt

$$(\ F \leq [X,\mathbb{R}_+](\varsigma,\sigma),\ f \in [X,\mathbb{R}_+](\varsigma,\sigma),\ G \leq [X,\mathbb{R}_+](\sigma,\tau),\ g \in [X,\mathbb{R}_+](\sigma,\tau))$$

$$\Rightarrow ((\inf_{\leq_{\varsigma,\sigma}} F)g = \inf_{\leq_{\varsigma,\tau}} \{f'g;\ f' \in F\},\ \text{wenn } \inf_{\leq_{\varsigma,\sigma}} F \text{ existiert, und}$$

$$f(\inf_{\leq_{\sigma,\tau}} G) = \inf_{\leq_{\varsigma,\tau}} \{fg';\ g' \in G\},\ \text{wenn } \inf_{\leq_{\sigma,\tau}} G \text{ existiert }), \text{ d.h.:}$$

(15) Die untere Grenze in $([X,\mathbb{R}_+];\leq)$ ist gegenüber dem Produkt in beiden Variablen invariant.

Aus den in §§3,5 kennengelernten Eigenschaften des Produkts von Schemata über Ω, ihrer Programme und Berechnungen und aus der Definition der Tiefe $v_{[X,\mathbb{R}]}$ ergibt sich offensichtlich für $a \in S_\Omega(\varsigma,\sigma)$, $c \in S_\Omega(\sigma,\tau)$, $\varsigma,\sigma,\tau \in S^*$,

(16) $v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p(ac))) = v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p(a)))v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p(c)))$ in $[X,\mathbb{R}_+]$.

Das Tupeln Λ in $[X,\mathbb{R}_+]$ ist definiert durch

$$t_{\sigma,\tau} : [X,\mathbb{R}_+](s_1,\tau) \times \ldots \times [X,\mathbb{R}_+](s_n,\tau) \longrightarrow [X,\mathbb{R}_+](\sigma,\tau) : (f_1,\ldots,f_n) \mapsto$$

$$\mapsto \langle f_1,\ldots,f_n\rangle$$

$$((\sigma,\tau) \in S^{*2},\ \sigma = s_1 \ldots s_n,\ \tau = t_1 \ldots t_p),$$

wobei für

$$f_i : x \mapsto (f_i^{(1)}(x), f_i^{(2)}(x)) \in \{(y,j), y \in X_{t_j}, j \in [p]\} \times \mathbb{R}_+ \quad (x \in X_{s_i})\ (i \in [n])$$

$\langle f_1,\ldots,f_n\rangle$ durch

$$\langle f_1,\ldots,f_n\rangle : (x,i) \mapsto (f_i^{(1)}(x), f_i^{(2)}(x)) \in \{(y,j); y \in X_{t_j}, j \in [p]\} \times \mathbb{R}_+$$

$$(x \in X_{s_i},\ i \in [n])$$

definiert ist.

Es ist leicht zu sehen, daß für $(\sigma,\tau) \in S^{*2}$, $\sigma = s_1 \ldots s_n$ gilt

$$(f_i, f_i' \in [X,\mathbb{R}_+](s_i,\tau) \text{ und } f_i \leq f_i' \quad (i\in[n])) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\langle f_1,\ldots,f_j,\ldots,f_n\rangle \leq \langle f_1,\ldots,f_j',\ldots,f_n\rangle \quad (j\in[n])), \text{ d.h.:}$$

(17) Das Tupeln in $([X,\mathbb{R}_+];\leq)$ ist isoton bezüglich aller Variablen in ihrem ganzen Definitionsbereich.

Nach (11),(12),(13) gilt außerdem für $(\sigma,\tau)\in S^{*2}$, $\sigma=s_1\ldots s_n$

$$(F_i \subseteq [X,\mathbb{R}_+](s_i,\tau),\ f_i\in[X,\mathbb{R}_+](s_i,\tau) \quad (i\in[n])) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\langle f_1,\ldots,\inf_{\leq s_j,\tau} F_j,\ldots,f_n\rangle = \inf_{\leq \sigma,\tau}\{\langle f_1,\ldots,f_j',\ldots,f_n\rangle ; f_j'\in F_j\},$$
wenn $\inf_{\leq s_j,\tau} F_j$ existiert, $(j\in[n]))$, d.h.:

(18) Die untere Grenze in $([X,\mathbb{R}_+];\leq)$ ist gegenüber dem Tupeln in allen Variablen invariant.

Nach den Eigenschaften des Tupelns von Schemata über Ω, ihrer Programme und Berechnungen und nach der Definition der Tiefe $v_{[X,\mathbb{R}]}$ gilt für $c_i\in S_\Omega(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$, $\sigma=s_1\ldots s_n, \tau\in S^*$,

(19) $v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p\langle c_1,\ldots,c_n\rangle)) = \langle v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p(c_1))),\ldots,v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p(c_n)))\rangle$ in $[X,\mathbb{R}_+]$.

Die <u>Iteration</u> $\dot{\iota}$ in $[X,\mathbb{R}_+]$ ist definiert durch

$$i_{s,\tau}: [X,\mathbb{R}_+](s,\tau s)\to[X,\mathbb{R}_+](s,\tau): f\mapsto f^+ \qquad ((s,\tau)\in S\times S^*, \tau=t_1\ldots t_p)$$

wobei für $f\in[X,\mathbb{R}_+](s,\tau s)$ das Element $f^+\in[X,\mathbb{R}_+](s,\tau)$ auf folgende Weise definiert ist:

$$f^+: x\mapsto((y,j),u)\in\{(y,j);y\in X_{t_j}, j\in[p]\}\times\mathbb{R}_+ :\Leftrightarrow$$

$$:\Leftrightarrow (\exists q\in\mathbb{N}_0\ \exists\, x_0=x,x_1,x_2,\ldots,x_q\in X_s : (f:x_{i-1}\mapsto((x_i,p+1),u_i), u_i\in\mathbb{R}_+ \ (i\in[q]),$$
$$f:x_q\mapsto((y,j),u_{q+1}), u_{q+1}\in\mathbb{R}_+)$$
$$\text{und } u=\sum_{k=1}^{q+1} u_k \ ).$$

Man sieht leicht, daß für $(s,\tau)\in S\times S^*$ gilt

$$(f,f'\in[X,\mathbb{R}_+](s,\tau s) \text{ und } f\leq f') \Rightarrow f^+\leq f'^+, \text{ d.h.:}$$

(20) Die Iteration in $([X,\mathbb{R}_+];\leq)$ ist isoton in ihrem ganzen Definitionsbereich.

Mit Hilfe von (11),(12),(13) kann man sich leicht überzeugen, daß außerdem für $(s,\tau)\in S\times S^*$ gilt

$$F\subseteq[X,\mathbb{R}_+](s,\tau s) \Rightarrow (\inf_{\leq s,\tau s} F)^+ = \inf_{\leq s,\tau}\{f^+;\ f\in F\}, \text{ wenn } \inf_{\leq s,\tau s} F \text{ existiert},$$

d.h.:

(21) Die untere Grenze in $([X,\mathbb{R}_+];\leq)$ ist gegenüber der Iteration invariant.

Aus den in §§3,5 ermittelten Eigenschaften der Iteration von Schemata über Ω, ihrer Programme und Berechnungen und aus der Definition der Tiefe $v_{[X,\mathbb{R}]}$ ergibt sich für $c\in S_\Omega(s,\tau s)$, $(s,\tau)\in S\times S^+$

(22) $v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p(c^+)))=(v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p(c))))^+$ in $[X,\mathbb{R}_+]$.

Wir bezeichnen noch für jedes $a=(f,s,\tau)\in I_S(s,\tau)\subseteq S_\Omega(s,\tau)$, $(s,\tau)\in S\times S^+$, mit

$$\tilde{\tilde{a}}:=v_{[X,\mathbb{R}]}(b(p(a)))\in[X,\mathbb{R}_+](s,\tau)$$

seine Berechnungstiefe und setzen $\tilde{\tilde{I}}_S(s,\tau):=\{\tilde{\tilde{a}};\ a\in I_S(s,\tau)\subseteq S_\Omega(s,\tau)\}$

$$\tilde{\tilde{I}}_S:=(\tilde{\tilde{I}}_S(s,\tau))_{(s,\tau)\in S\times S^+}.$$

Jetzt ist

(23) $((|X,\mathbb{R}_+|;\subseteq);\tilde{\tilde{I}}_S,\mathfrak{p},\mathfrak{k},\mathfrak{i})$

eine komponentenweise halbgeordnete heterogene Algebra vom gleichen Typ wie $(\mathfrak{Y}_\Omega;I_S,\mathfrak{p},\mathfrak{k},\mathfrak{i})$ mit den Eigenschaften (14),(15),(17),(18),(20),(21).

Nach (16),(19),(22) gilt:

(24) Die Berechnungstiefe $\mathfrak{p}\mathfrak{k}v_{[X,\mathbb{R}]}$ der Schemata aus $\mathfrak{Y}_\Omega$ ist ein Homomorphismus

$$\mathfrak{p}\mathfrak{k}v_{[X,\mathbb{R}]}:(\mathfrak{Y}_\Omega;I_S,\mathfrak{p},\mathfrak{k},\mathfrak{i})\to([X,\mathbb{R}_+];\tilde{\tilde{I}}_S,\mathfrak{p},\mathfrak{k},\mathfrak{i}).$$

7.3. Strukturerhaltende Berechnungskomplexitätsmaße von Schemata

In den Abschnitten 7.1, 7.2 hat sich gezeigt, daß ähnlich wie die weiter oben studierten Interpretationen auch einige Komplexitätsmaße die gemeinsame Struktur von Schemata, Programmen, Berechnungen und ihrer äußeren Verhalten wiedergeben. Wir untersuchen die Klasse der Berechnungskomplexitätsmaße von Schemata mit dieser Eigenschaft und leiten für die durch sie induzierten partiellen Komplexitätsmaße von Abbildungen einige zu Strassen (1972), (1973) analoge Resultate ab. Wir benutzen die am Anfang dieses Paragraphen eingeführte Terminologie (s.S.100).

Definition.
Ein Berechnungskomplexitätsmaß von Schemata

(1) $k:\mathfrak{Y}_\Omega^{sf,\mathfrak{p}_0t}\to(H;\subseteq)$ bzw. $k:\mathfrak{Y}_\Omega\to(H;\subseteq)$

nennen wir strukturerhaltend, wenn Folgendes gilt:

(2) k ist ein Homomorphismus $(\mathfrak{Y}_\Omega^{sf,\mathfrak{p}_0t};I_S,\mathfrak{p}_P,\mathfrak{k})\to(H;\hat{I}_S,\mathfrak{p},\mathfrak{k})$ bzw. $(\mathfrak{Y}_\Omega;I_S,\mathfrak{p}_P,\mathfrak{k},\mathfrak{i})\to(H;\hat{I}_S,\mathfrak{p},\mathfrak{k},\mathfrak{i})$ in eine komponentenweise halbgeordnete heterogene Algebra $(H;\subseteq)$;

(3) die Operationen $\curlywedge,\curlyvee$ bzw. $\curlywedge,\curlyvee,\curlyvee$ in $(H;\leq)$ sind bezüglich aller ihren Variablen isoton in ihrem ganzen Definitionsbereich;

(4) die untere Grenze in $(H;\leq)$ ist gegenüber den Operationen $\curlywedge,\curlyvee$ bzw. $\curlywedge,\curlyvee,\curlyvee$ in allen ihren Variablen invariant;

(5) die Kernäquivalenz $\mathcal{K}_k$ von k in $\mathcal{S}_\Omega^{sf,\lambda_0 t}$ bzw. $\mathcal{S}_\Omega$ ist gröber als die Kernäquivalenz $\mathcal{K}_{v_\mathcal{T}}$ der Terme-Interpretation $v_\mathcal{T}$ über $\mathcal{S}_\Omega^{sf,\lambda_0 t}$ (s.S.46) bzw. die Kernäquivalenz $\mathcal{K}_{v_f^{(2)}}$ der $v_f^{(2)}$-Interpretation über $\mathcal{S}_\Omega$ (s.S.42).

7.1. Satz.
Sei

$$k:\mathcal{S}_\Omega^{sf,\lambda_0 t}\to(H;\leq) \quad \text{bzw.} \quad k:\mathcal{S}_\Omega\to(H;\leq)$$

ein strukturerhaltendes Berechnungskomplexitätsmaß von Schemata induziert durch $\pi:\Omega\to(X)_{|S\times S^*}$ bzw. $\pi:\Omega\to[X]_{P|S\times S^*}$ (s.(2),S.101), und sei

$$\tilde{k}:(X)\to(H;\leq) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{k}:[X]_P\to(H;\leq)$$

das durch k induzierte partielle Komplexitätsmaß. Dann besitzt $\tilde{k}=(\tilde{k}_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in S^{*2}}$ folgende Eigenschaften (wir schreiben $\leq$ statt $\leq_{\sigma,\tau}$ in $H(\sigma,\tau)$, wenn ein Irrtum ausgeschlossen ist):

(6) $\tilde{k}_{r,\tau}(\pi_{r,\sigma}(\omega)f)\leq\tilde{k}_{r,\sigma}(\pi_{r,\sigma}(\omega))\tilde{k}_{\sigma,\tau}(f)$ in $(H;\leq)$, wenn beide Seiten definiert sind $(\omega\in\Omega_\sigma^r$, f aus $(X)(\sigma,\tau)$ bzw. $[X]_P(\sigma,\tau)$, $(r,\sigma,\tau)\in S\times S^*\times S^*)$;

(7) $\tilde{k}_{\sigma,\tau}\langle f_1,\ldots,f_n\rangle\leq\langle\tilde{k}_{s_1,\tau}(f_1),\ldots,\tilde{k}_{s_n,\tau}(f_n)\rangle$ in $(H;\leq)$, wenn beide Seiten definiert sind $(f_i$ aus $(X)(s_i,\tau)$ bzw. $[X]_P(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$, $\sigma=s_1\ldots s_n,\tau\in S^*)$;

und im Falle von $k:\mathcal{S}_\Omega\to(H;\leq)$

(8) $\tilde{k}_{s,\tau}(f^+)\leq(\tilde{k}_{s,\tau s})^+$ in $(H;\leq)$, wenn beide Seiten definiert sind $(f\in[X]_P(s,\tau s)$, $(s,\tau)\in S\times S^*)$.

Beweis:
Wir bewisen die Behauptung (7) für den Fall eines strukturerhaltenden Berechnungskomplexitätsmaßes $k:\mathcal{S}_\Omega^{sf,\lambda_0 t}\to(H;\leq)$ und des induzierten partiellen Komplexitätsmaßes $\tilde{k}:(X)\to(H;\leq)$. Wir benutzen dabei die Bezeichnungen S.101, 102.
Seien also $f_i\in(X)(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$, $\sigma=s_1\ldots s_n,\tau\in S$. Wir nehmen an, daß die rechte Seite definiert ist, d.h. daß für jedes $i\in[n]$

$$\tilde{k}_{s_i,\tau}(f_i)=\inf_{\leq_{s_i,\tau}}\{k_{s_i,\tau}(c);c\in S_\Omega^{sf,\lambda_0 t}(s_i,\tau),\ d(p(c_i))=f_i\}$$

existiert.
Fall 1. Wenn es für mindestens ein $j\in[n]$ kein $c\in S_\Omega^{sf,\lambda_0 t}(s_j,\tau)$ gibt

mit $d(p(c_j))=f_j$, so ist $\widetilde{k}_{s_j,\tau}(f_j)=\inf_{\subseteq_{s_j,\tau}}\emptyset$, das größte Element in $(H(s_j,\tau);\subseteq_{s_j,\tau})$, und weil das Infimum in $(H;\subseteq)$ gegenüber dem Tupeln invariant ist, ist die rechte Seite in (7) gleich $\inf_{\subseteq_{\sigma,\tau}}\emptyset$, dem größten Element in $(H(\sigma,\tau);\subseteq_{\sigma,\tau})$, und (7) gilt sicher immer, wenn die linke Seite definiert ist.
Fall 2. Es gelte nicht die Annahme aus dem Fall 1. Für jede Schemata $c_i\in S_\Omega^{sf,\lambda_0 t}(s_i,\tau)$ $(i\in[n])$ mit $d(p(c_i))=f_i$ gilt aber

(9) $\langle k_{s_1,\tau}(c_1),\ldots,k_{s_n,\tau}(c_n)\rangle=k_{\sigma,\tau}\langle c_1,\ldots,c_n\rangle$ in H, nach Voraussetzung, und weil nach §5 $d(p\langle c_1,\ldots,c_n\rangle)=\langle f_1,\ldots,f_n\rangle$ ist, muß für das Infimum auf der linken Seite in (7)

$$\widetilde{k}_{\sigma,\tau}\langle f_1,\ldots,f_n\rangle\subseteq\langle k_{s_1,\tau}(c_1),\ldots,k_{s_n,\tau}(c_n)\rangle$$

gelten, wenn es existiert. $c_1,\ldots,c_n$ waren aber beliebige Schemata mit $d(p(c_i))=f_i$ $(i\in[n])$, so daß

$$\widetilde{k}_{\sigma,\tau}\langle f_1,\ldots,f_n\rangle\subseteq\inf_{\subseteq_{\sigma,\tau}}\{\langle k_{s_1,\tau}(c_1),\ldots,k_{s_n,\tau}(c_n)\rangle;c_i\in S_\Omega^{sf,\lambda_0 t}(s_i,\tau),\ d(p(c_i))=f_i\ (i\in[n])\},$$

und wegen der Invarianz des Infimums in $(H;\subseteq)$ gegenüber dem Tupeln

$$\widetilde{k}_{\sigma,\tau}\langle f_1,\ldots,f_n\rangle\subseteq\langle\widetilde{k}_{s_1,\tau}(f_1),\ldots,\widetilde{k}_{s_n,\tau}(f_n)\rangle \text{ in } (H;\subseteq),$$

wenn die linke Seite definiert ist.
Der Beweis der übrigen Behauptungen verläuft völlig analog.

7.2. Satz.
Sei

$$k:\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\lambda_0 t}\to(H;\subseteq) \quad \text{bzw.} \quad k:\mathcal{Y}_\Omega\to(H;\subseteq)$$

ein strukturerhaltendes Berechnungskomplexitätsmaß von Schemata induziert durch $\pi:\Omega\to(X)_{|S\times S^*}$ bzw. $\pi:\Omega\to[X]_{P|S\times S^*}$ und sei

$$\widetilde{k}:(X)\to(H;\subseteq) \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{k}:[X]_P\to(H;\subseteq)$$

das durch k induzierte partielle Komplexitätsmaß. Ist

$$l:(X)\to(H;\subseteq) \quad \text{bzw.} \quad l:[X]_P\to(H;\subseteq)$$

ein weiteres part. Komplexitätsmaß über (X) bzw. $[X]_P$ mit den Eigenschaften (6),(7),(8) und gilt

(10) $l_{s,\tau}(f^\#,s,\tau)\subseteq\widetilde{k}_{s,\tau}(f^\#,s,\tau)$ bzw. $l_{s,\tau}(f^\flat,s,\tau)\subseteq\widetilde{k}_{s,\tau}(f^\flat,s,\tau)$
$((f,s,\tau)\in I_S(s,\tau),\ (s,\tau)\in S\times S^+)$

(s.(53),S.56, (58),S.57 bzw. (136),S.78, (143),S.79) und

(11) $l_{s,\tau}(\pi_{s,\tau}(\omega)) \leq \tilde{k}_{s,\tau}(\pi_{s,\tau}(\omega))$ $(\omega \in \Omega_\tau^s,\ (s,\tau) \in S \times S^*)$,

so ist

(12) $l_{\sigma,\tau}(g) \leq k_{\sigma,\tau}(g)$ (g aus $(X)(\sigma,\tau)$ bzw. $[X]_p(\sigma,\tau)$, $(\sigma,\tau) \in S^{*2}$),

wenn beide Seiten definiert sind.

Beweis:
Wir beweisen die Behauptung (12) für den Fall von $k: \mathcal{Y}_\Omega^{sf,\mathcal{A}ot} \to (H;\subseteq)$, $l:(X) \to (H;\subseteq)$. Zur Abkürzung schreiben wir $k(c)$ statt $k_{\sigma,\tau}(c)$, $\tilde{k}(f)$ statt $\tilde{k}_{\sigma,\tau}(f)$, $l(f)$ statt $l_{\sigma,\tau}(f)$ und wie bisher $\subseteq$ statt $\subseteq_{\sigma,\tau}$, wenn ein Irrtum ausgeschlossen ist.

Sei $g \in (X)(\sigma,\tau)$, $(\sigma,\tau) \in S^{*2}$. Wir nehmen an, daß die rechte Seite in (12) definiert ist.

Fall 1. Gibt es kein $c \in S_\Omega^{sf,\mathcal{A}ot}(\sigma,\tau)$ mit $d(p(c))=g$, so ist

$$\tilde{k}_{\sigma,\tau}(g) = \inf_{\subseteq_{\sigma,\tau}} \emptyset,$$

das größte Element in $(H(\sigma,\tau);\subseteq_{\sigma,\tau})$, und (12) gilt immer, wenn die linke Seite definiert ist.

Fall 2. Es gelte nicht die Annahme aus dem Fall 1. Aus der Zerlegung in §4 (S.38 bis 40) folgt, daß es zu jedem Schema $c \in S_\Omega^{sf,\mathcal{A}ot}(\sigma,\tau)$ endlich viele Schemata

(13) $\omega, \omega', \ldots \in \Omega$ in $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\mathcal{A}ot}$

und endlich viele Schemata

(14) $(f,s,\tau) \in I_S(s,\tau)$, $(f',s',\tau') \in I_S(s',\tau')$, ... in $\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\mathcal{A}ot}$

gibt, mit der Eigenschaft, daß durch endlich viele Anwendungen der part. Operationen $\mathcal{F}_p$ und $\mathcal{A}$ in $(\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\mathcal{A}ot}; I_S, \mathcal{F}_p, \mathcal{A})$ auf (13) und (14) ein Schema $c' \in S_\Omega^{sf,\mathcal{A}ot}(\sigma,\tau)$ entsteht mit dem gleichen äußeren Terme-Verhalten wie c,

(15) $v_{\mathcal{J}}(c') = v_{\mathcal{J}}(c)$ in $T_\Omega(\sigma,\tau)$ (s.Abschnitt 5.1).

Wir werden das Schema c' in der Form

(16) $\alpha(\omega, \omega', \ldots, (f,s,\tau), (f',s',\tau'), \ldots)$ schreiben, wobei

(17) $\alpha(x, x', \ldots, y, y', \ldots)$

ein Polynom in der part. Algebra $(\mathcal{Y}_\Omega^{sf,\mathcal{A}ot}; \mathcal{F}_p, \mathcal{A})$ ist, zu der wir gewisse Variablen $x, x', \ldots, y, y', \ldots$ adjungiert haben; das Schema c' in (16) entsteht durch die Einsetzung der Elemente (13),(14) in (17).

Wenn wir jetzt von einem Schema $c \in S_\Omega^{sf,\mathcal{A}\circ t}(\sigma,\tau)$ mit $d(p(c))=g$ ausgehen, so folgt aus (15) nach den Abschnitten 5.7 und 5.8, daß ebenfalls

(18) $d(p(c'))=d(p(c))=g.$

Weil die Interpretationen d und $\mathcal{A}$ das Produkt und Tupeln erhalten, ergibt sich aus (16) und (18)

(19) $g=d(p(\alpha(\omega,\omega',\ldots,(f,s,\tau),(f',s',\tau'),\ldots)=\alpha(d(p(\omega)),d(p(\omega')),\ldots,$

$d(p(f,s,\tau)),d(p(f',s',\tau')),\ldots)=\alpha(\pi(\omega),\pi(\omega'),\ldots,(f^{\#},s,\tau),$

$(f'^{\#},s',\tau'),\ldots)$

in $((X);\mathcal{A},\mathcal{A})$.

Wegen der Eigenschaften (6),(7) des Komplexitätsmaßes $\mathcal{L}$ gilt für g

$$\mathcal{L}(g) \leq \alpha(\mathcal{L}(\pi(\omega)),\mathcal{L}(\pi(\omega')),\ldots,\mathcal{L}(f^{\#},s,\tau),\mathcal{L}(f'^{\#},s',\tau'),\ldots)$$

in $((H;\leq);\mathcal{A},\mathcal{A})$, wenn $\mathcal{L}(g)$ definiert ist, und nach (10),(11) ist dann wegen der Isotonie des Produkts und Tupelns in $(H;\leq)$

$$\mathcal{L}(g) \leq \alpha(\tilde{k}(\pi(\omega)),\tilde{k}(\pi(\omega')),\ldots,\tilde{k}(f^{\#},s,\tau),\tilde{k}(f'^{\#},s',\tau'),\ldots)$$

in $((H;\leq)_{\mathcal{A}},\mathcal{A})$ oder gleich

(20) $\mathcal{L}(g) \leq \alpha(k(\omega),k(\omega'),\ldots,k(f,s,\tau),k(f',s',\tau'),\ldots)$ in $((H;\leq),\mathcal{A},\mathcal{A})$.

Das Berechnungskomplexitätsmaß k ist nach Voraussetzung strukturerhaltend, d.h. es erhält das part. Produkt und das Tupeln von Schemata, und seine Kernäquivalenz ist gröber als diejenige der Terme-Interpretation $\nu_{\mathcal{J}}$. Wir erhalten also auf der rechten Seite in (20)

$$\alpha(k(\omega),k(\omega'),\ldots,k(f,s,\tau),k(f',s',\tau'),\ldots)=k(\alpha(\omega,\omega',\ldots,(f,s,\tau),$$

$$(f',s',\tau'),\ldots)=k(c')=k(c),$$

nach (15). c war dabei ein beliebiges Schema aus $S_\Omega^{sf,\mathcal{A}\circ t}(\sigma,\tau)$ mit $d(p(c))=g$. Es gilt also auch im Falle 2

$$\mathcal{L}(g) \leq \inf\{k(c);c \in S_\Omega^{sf,\mathcal{A}\circ t}(\sigma,\tau),\ d(p(c))=g\}=\tilde{k}(g),$$

wenn $\mathcal{L}(g)$ definiert ist.

Im Falle von $k:\mathcal{Y}_\Omega \to (H;\leq)$, $\mathcal{L}:[X]_p \to (H;\leq)$ verläuft der Beweis völlig analog.

Literatur

Arbib,M.A., Give'on,Y. (1968a), Algebra automata I: Parallel programmimg as a prolegomena to the categorical approach, Information and Control 12, 331-345

Birknoff,G., Lipson,J.D.(1970), Heterogeneous algebras , Journal of Combinatorial Theory 8, 115-133

Eilenberg,S., Wright,J.B. (1967), Automata in general algebras, Information and Control 11, 452-470

Elgot,C.C. (1970a), The external behavior of machines, Proc. of the 3. Hawaii Internat. Conf. on System Sciences

Elgot,C.C. (1970b), The common algebraic structure of exit-automata and machines , Computing 6, 349-370

Elgot,C.C. (1971), Algebraic theories and program schemes , in Engeler,E. (ed), Symp. on semantics of algorithmic languages, Lect. Notes Math. 188, Springer, Berlin 1971, 71-88

Elgot ,C.C. (1972), Remarks on one-argument program schemes, in Rustin,R. (ed), Formal semantics of algorithmic languages, Courant Comp. Sci. Symp 2, 1970, Prentice Hall 1972

Fuchs,L. (1966), On partially ordered algebras I, Colloq. Math. Warszawa 14, 115-130

Fuchs,L. (1965) On partially ordered algebras II, Acta Scient. Math. Szeged 26, 35-41

Give'on,Y., Arbib,M.A. (1968b), Algebra automata II: The categorical framework for dynamic analysis, Information and Control 12, 346-370

Grätzer,G. (1968), Universal algebra, Van Nostrand, Princeton 1968

Higgins,P.J. (1963), Algebras with a scheme of operators, Math. Nachr. 27, 115-132

Schubert,H. (1970), Kategorien I,II, Springer, Berlin 1970

Strassen,V. (1972), Berechnung und Programm I, Acta Informatica 1, 320-335

Strassen,V. (1973), Berechnung und Programm II, Acta Informatica 2, 64-79

Vladimir Sigmund

3400 Göttingen
Lotzestr. 57

Lebenslauf

9. Mai 1944	geboren in Olomouc, Tschechoslowakei
Vater	Dipl.-Ing. Vladimir Sigmund, leitender Angestellter
Mutter	Zdenka Sigmundova, geb. Chromcova, leitende Angestellte
1950-58	Volks- und Oberschule in Olomouc, seit 1952 in Prag
1958-61	Lehrzeit, Prag
1961-65	Ingenieurschule des Maschinenbaus, Prag
10.6.1965	Reifeprüfung
1965-68	6 Semester Mathematik/Physik, Karlsuniversität Prag
1968-71	5 Semester Mathematik/Physik, Georg-August-Universität Göttingen
5.2.1971	Diplom-Hauptprüfung für Mathematiker an der Universität Göttingen
1971-74	Stipendiat der Gesellschaft für Wissenschaftliche Datenverarbeitung Göttingen; hier ab
1974	Wissenschaftlicher Assistent

Göttingen, Mai 1974